

# **Comportamiento Dinámico de un Péndulo Triple Plano**

**Iván de Jesús Rivas-Camero**

Universidad Politécnica de Tulancingo, Tulancingo, Hidalgo, México, [irivas@upt.edu.mx](mailto:irivas@upt.edu.mx)

**José Manuel Sausedo-Solorio**

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, Hidalgo, México, [susedo@uaeh.edu.mx](mailto:sausedo@uaeh.edu.mx)

## **RESUMEN**

Se encuentra la solución de un péndulo triple plano con una perturbación armónica usando un modelo completo no lineal del péndulo de n-eslabones desarrollado en este trabajo. Se hace un análisis de las frecuencias de resonancia así como de los diferentes estados dinámicos resultantes al variar la magnitud, la frecuencia de perturbación y el rozamiento entre eslabones. Se ha encontrado que los estados del péndulo pueden ser periódicos, cuasi-periódicos y caóticos. Se hace una comparación entre los resultados del modelo completo no lineal y el modelo simplificado de pequeñas oscilaciones.

## **ABSTRACT**

It is shown the solution of a triple pendulum in two dimensions with a periodic perturbation using a full nonlinear model with n-links proposed in this work. An analysis of resonance frequencies as well as dynamical states resulting from the variation of magnitude, frequency, and the friction among links is done. It has been found the pendulum can show periodic, quasi-periodic, and chaotic states. A comparison between results of the nonlinear model and its simplification for small oscillations is done.

**Palabras Claves:** Péndulo triple, frecuencia de resonancia, periódico, cuasi-periódico y caótico.

## **1. INTRODUCCIÓN**

En el desarrollo de modelos matemáticos deterministas normalmente se emplean ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo, cuanto más detallado es el modelo con respecto a la descripción del sistema las ecuaciones aumentan su complejidad hasta convertirse en ecuaciones diferenciales no-lineales. Debido a esa no linealidad pueden existir determinadas condiciones donde el comportamiento de la solución a tiempos grandes es caótico, es decir, dichas soluciones asintóticas acotadas no convergen a ningún conjunto límite de soluciones (Lara et al., 2003).

El interés en el estudio de péndulos forzados periódicamente, los cuales pueden desplegar movimientos caóticos, ha sido ampliamente generalizado; muchos investigadores han estado estudiando activamente la respuesta numérica compleja de estos sistemas físicos, en la referencia (Awrejcewicz et al., 2007) se menciona que Beckert (1987) en su artículo reporta el estudio de un péndulo forzado con torsión no lineal por medio de mediciones en diagramas de bifurcación, las cuales mostraban periodos dobles de caos; así como también Blackburn (1987) en su estudio reportó observaciones experimentales de caos en un péndulo perturbado y amortiguado por medio de un torque de comportamiento alterno (Awrejcewicz et al., 2007)

Es bien sabido que el impacto y la fricción acompañan a casi todo el comportamiento real presente en sistemas dinámicos. En (Awrejcewicz and Kudra, 2007) presentan el modelado de un péndulo triple físico plano con barreras situadas arbitrariamente impuestas sobre la posición del sistema, incluyendo modelado de impacto y movimiento de deslizamiento, presentan también esquemas numéricos para la simulación del sistema, métodos para investigar la estabilidad de orbitas en sistemas dinámicos no perturbados y principalmente su aplicación para un sistema de pistón-biela-manivela de un motor mono-cilindro de combustión, modelado como un péndulo triple invertido con impactos, con el propósito de analizar el ruido generado por impactos entre el pistón y el cilindro (Awrejcewicz and Kudra, 2007).

El análisis de un péndulo triple también se ha empleado en el estudio de swing de golf como en (Aicardi, 2007), donde presentan una investigación basada en el análisis de movimiento de un robot simulado para tareas humanas. El análisis que presenta se enfoca en la parametrización de trayectorias en el tiempo y encontrar los parámetros óptimos. En ese análisis obtienen una trivial pero útil descomposición de trayectorias, en términos de componentes de funciones, para caracterizar esas funciones con una estructura los parámetros influyen en una forma predecible y controlable (Aicardi, 2007).

Como ejemplo de aplicación de sistemas pendulares, se tiene el uso de un péndulo triple para sistemas de aislamiento de vibración sísmica como en (Wu, 2007), donde, como en este trabajo, es empleado para estudiar los modos de frecuencia o respuesta de la función de transferencia. En el mismo sentido en (Morgan, 2007) presentan estudios analíticos y experimentales de un péndulo triple empleado como aislador de movimientos sísmicos lineales con viscosidad no lineal y con mecanismos de disipación de energía de histéresis bilineal.

En (Ruet, 2007) se encuentra otra aplicación donde se estudia un sistema de suspensión usando diferentes modelos numéricos del péndulo triple cuyo propósito es de filtrar las altas frecuencias del ruido sísmico. Así mismo en (Plissi et al., 2004) el péndulo triple es usado en la suspensión del sistema óptico diseñado para minimizar los efectos del ruido sísmico y térmico sobre las masas suspendidas del Interferómetro Laser del Observatorio de onda Gravitacional, (LIGO, por sus siglas en inglés).

Uno de los aspectos de este artículo es el planteamiento de un esquema matemático apto para la generalización para  $n$ -péndulos usando un esquema matricial. A diferencia de (Grossman, 2007), en este trabajo se plantea la generalización a  $n$ -eslabones a partir de ecuaciones matriciales, donde se plantea una generación simbólica de las ecuaciones de un péndulo de  $n$ -eslabones. Otro ejemplo de escalabilidad en sistemas mecánicos se puede encontrar en (Schmitt and Bender, 2005), donde se realiza la comparación entre procedimientos de simulación dinámica que son escalables como el que se propone aquí.

En este sentido, es común emplear las secciones de Poincaré y gráficas en espacio fase para analizar comportamientos periódicos y caóticos, como en (Berdahl and Vander, 2001) donde analizan movimientos caóticos de un péndulo triple, el cual es controlado con un magneto rotativo permanente. Por otro lado en (Souza de Paula et al., 2006) presentan la comparación entre un péndulo experimental y un modelo propuesto no lineal, en donde analizan respuestas periódicas, caos y caos transitorio.

Al igual que en este trabajo, en (Awrejcewicz and Kudra, 2008) presentan respuestas periódicas y caóticas de un sistema de péndulo triple, los resultados obtenidos del modelo que presentan los comparan contra resultados obtenidos de una implementación física de dicho sistema, para lo cual evalúan tres diferentes grupos de parámetros para elegir los que mejor se acerquen al sistema real.

En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de un sistema de péndulo triple, el cual presenta estados periódicos, estados cuasi-periódicos y estados caóticos. Aquí se usa un modelo matemático para el péndulo triple, en el que se desprecia el peso de los enlaces y se consideran diferentes coeficientes de fricción. Del modelo completo no lineal se obtiene un modelo lineal simplificado de pequeñas oscilaciones, el cual se puede extender a sistemas de  $n$ -péndulos; en este sentido, aquí se hace una comparación de los resultados arrojados por ambos modelos.

El propósito de este trabajo ha sido el de estudiar el estado dinámico de un péndulo triple, el cual es empleado en análisis y aplicación de diversos sistemas físicos, como el caso un sistema de suspensión para filtrar ruido sísmico (Ruet, 2006) y (plissi, et. al., 2004), un sistema pistón-biela-manivela de un motor mono-cilindro (Awrejcewicz

and Kudra, 2007), en nuestro caso el estudio está enfocado en la futura aplicación para el análisis dinámico de un brazo de robot flexible con tres enlaces. El sistema que aquí se analiza es perturbado de forma periódica, y se analiza su comportamiento con respecto a la frecuencia de perturbación con diferentes coeficientes de fricción; Se encuentran frecuencias de resonancia, así como zonas de respuesta periódica, cuasi-periódica y caótica, las cuales dependen principalmente de los coeficientes de rozamiento y la frecuencia de perturbación, no así de la amplitud de dicha perturbación.

La estructura de este trabajo consiste primeramente en el desarrollo del modelo matemático del sistema, tanto no lineal como su aproximación lineal, posteriormente se presenta las ecuaciones que llevan a la solución del sistema, enseguida se muestran los resultados numéricos del sistema y finalmente se mencionan las conclusiones de este trabajo.

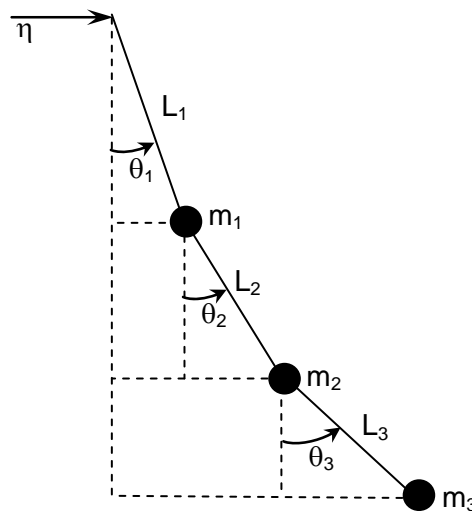
## 2. DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO

En la Figura 1 se presenta el esquema de un péndulo triple en dos dimensiones con masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ ; longitudes de enlaces  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ , el sistema es sometido a una perturbación periódica  $\eta$ . Se analizan los tres ángulos que se forman con respecto a la vertical como se indica en la figura.

La perturbación periódica que se aplica al sistema es representada por la expresión senoidal  $\eta = \eta_0 \cos \omega t$ . Aplicando análisis de trigonometría se obtienen las siguientes distancias horizontales y verticales para cada sección del péndulo, tomando como referencia el punto de aplicación de dicha perturbación, tanto para las distancias verticales como para las horizontales, las cuales se describen en la tabla 1.

**Tabla 1: Ecuaciones para las distancias verticales y horizontales**

Distancia horizontal	Distancia vertical
$x_1 = L_1 \text{sen } \theta_1$	$y_1 = -L_1 \text{cos } \theta_1$
$x_2 = x_1 + L_2 \text{sen } \theta_2$	$y_2 = y_1 - L_2 \text{cos } \theta_2$
$x_3 = x_2 + L_3 \text{sen } \theta_3$	$y_3 = y_2 - L_3 \text{cos } \theta_3$



**Figura 1: Esquema del péndulo triple**

El desarrollo del modelo matemático de este sistema se lleva a cabo empleando la ecuación de movimiento de Euler-Lagrange, representada por la ecuación (1). Este desarrollo requiere del análisis de la energía cinética y energía potencial del sistema, así como de las pérdidas de energía generadas por la fricción entre los eslabones. Dicho análisis requiere hacer uso de variables generalizadas (Golstein, 2003).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{\theta}_k} = 0 \quad (1)$$

donde  $L$  es la ecuación de Lagrange y se obtiene con la diferencia de la energía cinética identificada con la variable  $T$  y la energía potencial identificada con la variable  $u$ , es decir  $L=T-u$ ;  $Q$  representa la función de rozamiento. En este caso que se analiza un sistema de péndulo triple, se tiene que el subíndice  $k=1, 2, 3$  y  $R_x =$  *Coefficiente de rozamiento del eslabón x*

$$Q = \frac{1}{2} R_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} R_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2)^2$$

La velocidad es la magnitud de la derivada del vector de posición del péndulo para cada una de sus masas, se toma  $r_x$  como el vector de posición de la masa  $x$ , por tanto la expresión para la energía cinética se representa de la siguiente forma:  $T_x = \frac{1}{2} m_x |\dot{r}_x|^2$ , de tal forma que la energía cinética total del sistema se obtiene al sumar las energías cinéticas producidas por cada una de las masas en movimiento del sistema, en este caso particular se tiene:  $T = \frac{1}{2} m_1 |\dot{r}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{r}_2|^2 + \frac{1}{2} m_3 |\dot{r}_3|^2$ , y la energía potencial total del sistema del péndulo triple se obtiene con la expresión:  $u = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3$ ;  $g$  representa la constante de aceleración por gravedad.

Con el desarrollo de la ecuación (1) se obtiene el modelo matemático del sistema del péndulo triple no lineal completo, el cual es representado en forma matricial de la siguiente forma:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta)\dot{\theta}^2 + R\theta + P(\theta) + f(\theta, t) = 0 \quad (2)$$

Dónde:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_1 & M_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) & M_{13} \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ M_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) & M_2 & M_{23} \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ M_{13} \cos(\theta_1 - \theta_3) & M_{23} \cos(\theta_2 - \theta_3) & M_3 \end{bmatrix}$$

$$N(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) & M_{13} \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \\ -M_{12} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) & 0 & M_{23} \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) \\ -M_{13} \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) & -M_{23} \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 \end{bmatrix}; \quad P(\theta) = \begin{bmatrix} A_1 g \text{sen} \theta_1 \\ A_2 g \text{sen} \theta_2 \\ A_3 g \text{sen} \theta_3 \end{bmatrix} \quad f(\theta, t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos \theta_1 \\ A_2 \cos \theta_2 \\ A_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \ddot{\eta}$$

Donde cada  $M_i$  es de la forma  $M_i = \sum (m_k)L_i^2$

Una representación lineal del modelo, la cual es aproximada y es más simple para el modelo del sistema de péndulo triple se obtiene empleando el análisis para pequeñas oscilaciones, por lo que se requiere hacer la consideración de que los ángulos son tan pequeños que se aproximan a cero y por tanto las siguientes aproximaciones:  $\cos\theta \approx 1$ ,  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos(\theta_a - \theta_b) \approx 1$  y  $\sin(\theta_a - \theta_b) \approx 0$ . La linealización del sistema presenta la oportunidad de obtener un modelo general que se puede extender a sistemas de n péndulos cuando se representa matricialmente de la siguiente forma:

$$ML\ddot{\theta} + R\dot{\theta} + gml\theta + ml\eta_a = 0$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_1L_1 & m_2L_1 & m_3L_1 \\ 0 & m_2L_2 & m_3L_2 \\ 0 & 0 & m_3L_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ L_1 & L_2 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & 0 & 0 \\ 0 & (m_2 + m_3) & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad \eta_a = \begin{bmatrix} \eta \\ \eta \\ \eta \end{bmatrix}.$$

### 3. SOLUCIÓN DEL SISTEMA

La solución del sistema se obtiene por medios numéricos, en este trabajo se emplea el software Matlab principalmente con la función ode15s, la cual resuelve ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que describe el modelo del péndulo triple debe ser expresado como un sistema ecuaciones diferenciales de primer orden que tenga la forma  $y' = f(t,y)$ . Se emplea la representación en espacios de estado, declarando las siguientes nuevas variables:  $u = \dot{\theta}_1$ ,  $v = \dot{\theta}_2$ ,  $w = \dot{\theta}_3$ . Con estas nuevas variables, el sistema ahora contiene matrices y vectores de dimensión 6, por tanto el sistema de forma matricial ahora se expresa como:

$$d\theta = M_a(\theta)^{-1}[-N_a(\theta)v_a - P_a(\theta) - f(\theta,t)] \quad (3)$$

Dónde:

$$d\theta = [u \quad v \quad w \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T, \quad v_a = [u^2 \quad v^2 \quad w^2 \quad -u \quad -v \quad -w]^T$$

Y las matrices particionadas 6x6 compuestas por las matrices 3x3 antes mencionadas, cabe aclarar que  $I$  es la matriz identidad 3x3 y  $\mathbf{0}$  corresponde a una matriz cero 3x3 o un vector cero 3x1.

$$M_a(\theta) = \begin{bmatrix} M(\theta) & R \\ 0 & I \end{bmatrix}, N_a(\theta) = \begin{bmatrix} N(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, P_a(\theta) = \begin{bmatrix} p(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, f_a(\theta, t) = \begin{bmatrix} f(\theta, t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De igual forma, el modelo simplificado para pequeñas oscilaciones o modelo lineal es representado de la siguiente forma:

$$d\theta = L_E^{-1} M_E^{-1} (-G_E m_E l_E \theta_E - m_E l_E E) \quad (4)$$

Donde:  $\theta_E = [u \ v \ w \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ ,  $E = [0 \ 0 \ 0 \ \eta \ \eta \ \eta]^T$

$$M_E = \begin{bmatrix} M & R \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad L_E = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad m_E = \begin{bmatrix} 0 & m \\ I & 0 \end{bmatrix}; \quad l_E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}; \quad G_E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix};$$

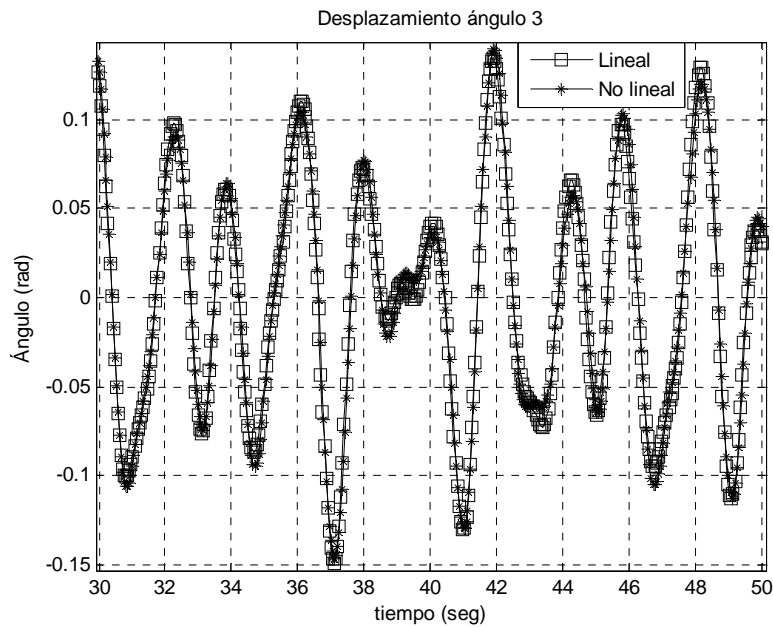
$$G = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}.$$

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

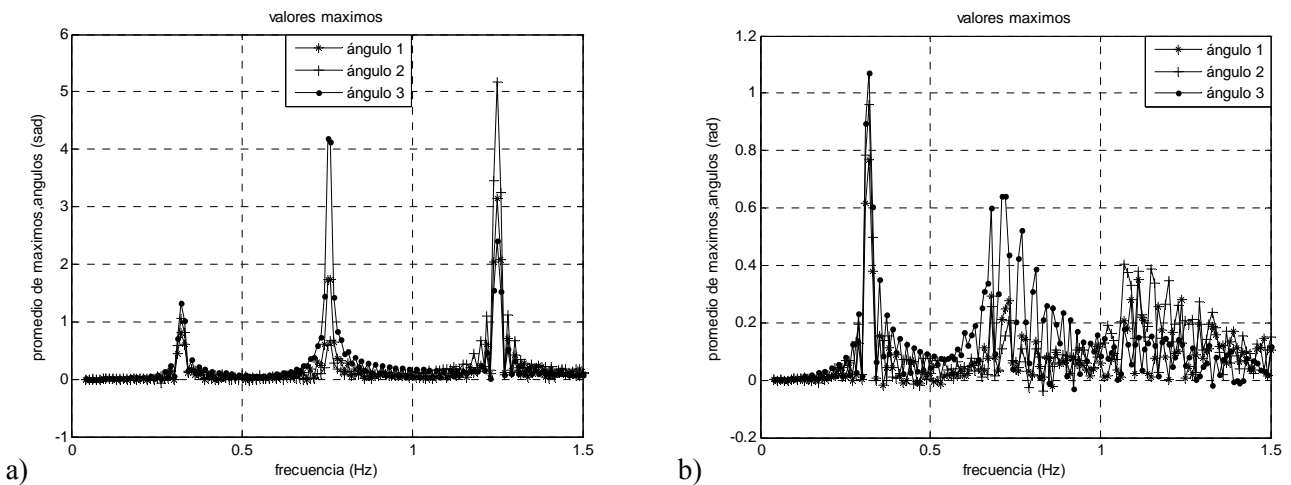
Primeramente se hace una comparación entre los resultados del modelo no lineal (completo) y el modelo lineal (simplificado con pequeñas oscilaciones), los resultados a comparar son el comportamiento con respecto al tiempo del desplazamiento angular de cada una de las masas que conforman el péndulo triple. Por tanto se programan las ecuaciones (3) y (4), en la perturbación se emplea una frecuencia de 0.5 Hz y una amplitud de 0.05 m, aunque los modelos desarrollados son para una representación general del sistema; para este ejemplo particular se consideran las tres masas y los tres enlaces iguales, de 1 kg y 1 m, respectivamente, lo cual en un momento dado permitiría hacer una simplificación considerable a dicho modelo.

Para obtener una mejor visualización de los resultados de ambos modelos se toma el caso más extremo, mismo que se obtiene cuando se ignora el efecto de rozamiento. Cabe mencionar que en los resultados que se presentan posteriormente se toman diferentes valores de fricción. En la figura 2 se presenta el comportamiento en el tiempo del ángulo 3 para ambos modelos, es fácil apreciar que la respuesta del modelo lineal es muy similar a la respuesta del modelo no lineal.

Otra comparación interesante entre ambos modelos, es la que se obtiene en serie de frecuencia, ahora con la frecuencia de la perturbación variable desde 0 a 1.5 Hz y se conservan los valores del resto de los parámetros empleados en la comparación de serie de tiempo anterior; en la figura 3 a) y b) se presentan el comportamiento de los 3 últimos valores máximos de cada ángulo, tomados de la serie de tiempo, del modelo simplificado y del modelo no lineal completo, respectivamente.



**Figura 2: Comparación entre la respuesta del modelo lineal y el modelo no lineal, en serie de tiempo para el comportamiento del ángulo 3**

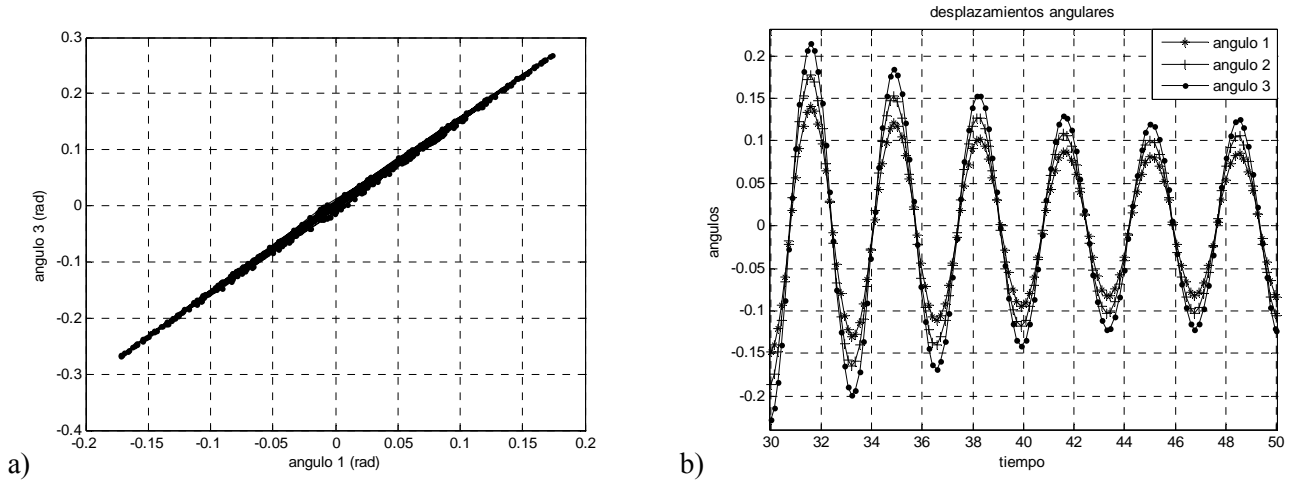


**Figura 3: Respuesta en frecuencia para: a) El modelo lineal, b) El modelo no lineal**

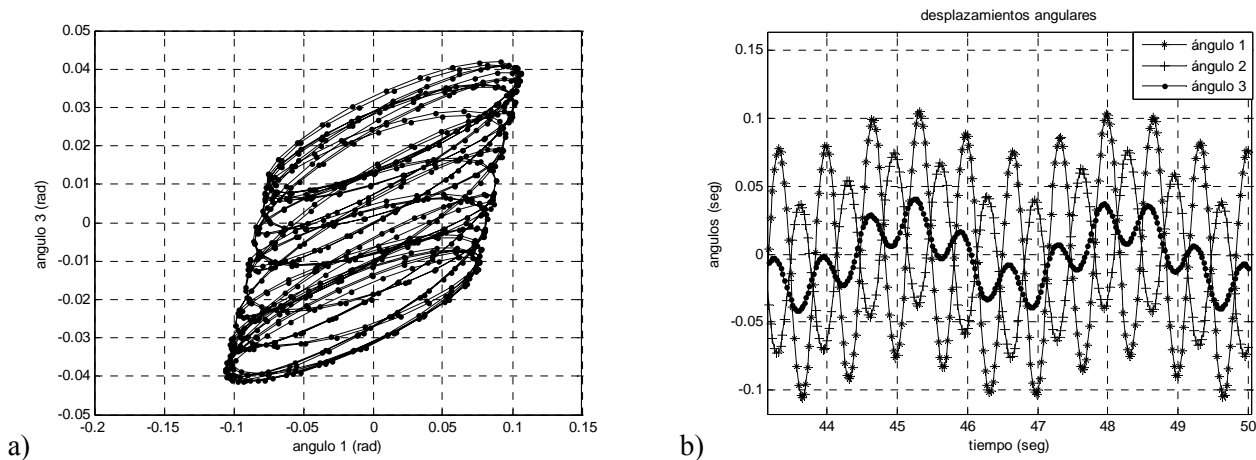
Comparando las dos respuestas en frecuencia, se aprecia que ambas coinciden al presentar tres frecuencias de resonancia; En la primera de ellas es clara la similitud para ambos modelos, tanto en el valor de la frecuencia como en la amplitud; en cambio, aunque el valor de las dos últimas frecuencias de resonancia son aproximadamente iguales en los dos modelos, para el caso del modelo lineal las amplitudes se disparan a valores considerablemente irreales, lo cual manifiesta un error adquirido por la simplificación del modelo únicamente en las frecuencias de resonancia.

El sistema de péndulo triple presenta diferentes estados en su respuesta, que dependen principalmente de la frecuencia de la perturbación y del coeficiente de rozamiento. Se combinan estos dos parámetros para obtener tres estados diferentes en la respuesta del sistema del péndulo triple, empleando el modelo completo.

En las figuras 4 a la 6 se presentan las respuestas del sistema en estado, periódico, cuasi-periódico y caótico, respectivamente, tanto en graficas de espacio fase, como en las series de tiempo correspondientes. En los diagramas de espacio estado se grafica el comportamiento del ángulo 1 contra el del ángulo 3, ya que es en esta relación donde se observa mejor el comportamiento de cada uno de los tres estados antes mencionados. Cabe mencionar que los resultados expuestos son selectivos, ya que se han seleccionado frecuencias e intervalos de tiempo donde sean más claros los comportamientos que se expresan.

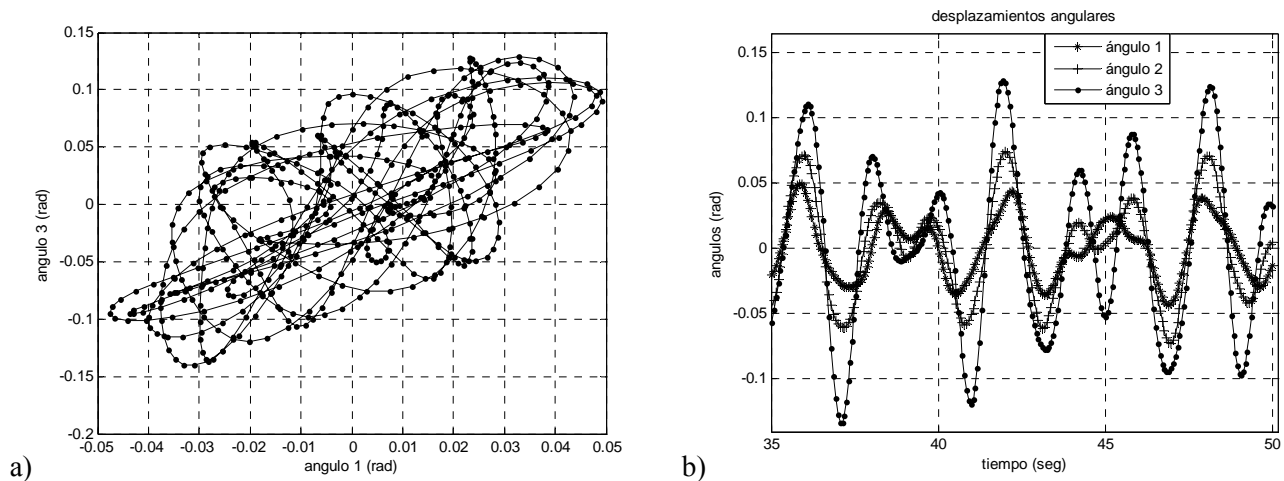


**Figura 4: comportamiento periódico 0.3 Hz y 1 Nm/s<sup>2</sup> a) Diagrama espacio fase, b) serie de tiempo**



**Figura 5: comportamiento cuasi-periódico 1.5 Hz y 0.1 Nm/s<sup>2</sup>, a) Diagrama espacio fase, b) serie de tiempo**





**Figura 6: comportamiento caótico 0.5 Hz y 0.01 Nm/s<sup>2</sup>, a) Diagrama espacio fase, b) serie de tiempo**

## 5. CONCLUSIONES

Se ha trabajado con un modelo matemático no lineal para el péndulo triple en dos dimensiones, del cual se ha desarrollado un modelo simplificado lineal, considerando aproximación de pequeñas oscilaciones, en éste último se ha encontrado una representación matricial que permite extender el modelo para sistemas de  $n$  péndulos de manera natural.

En la solución del sistema que muestra principalmente el comportamiento de los desplazamientos angulares, tanto en función del tiempo como en función de la frecuencia, se encontró que la frecuencia de perturbación en conjunto con los coeficientes rozamientos definen zonas de respuesta con estado periódico, respuesta con estado cuasi-periódico y respuestas con estado caótico.

Se comparan los resultados obtenidos del modelo lineal contra los resultados del modelo no-lineal completo; la comparación consiste básicamente en el comportamiento de la respuesta en serie de tiempo y en serie de frecuencia; se detectan errores considerables del modelo lineal solo en las frecuencias de resonancia e intervalos pequeños cercanos a ellas.

A lo largo de la respuesta en frecuencia del sistema, se encontraron tres frecuencias de resonancia, la primera de ellas es claramente definida, ya que en ambos modelos coinciden los valores de frecuencia y de amplitud, en cambio las dos últimas frecuencias de resonancia presentan atenuación considerable cuando se incrementan los coeficientes de atenuación, además se presentan desplazamientos y comportamiento irregular; cabe hacer mención que con valores grandes de los coeficientes de rozamiento las dos últimas frecuencias de resonancia son atenuadas completamente.

## REFERENCIAS

- Aline Souza de Paula, Marcelo Amorim Savi and Francisco Heitor Lunes Pereira-Pinto (2006). "Chaos and transient in an experimental nonlinear pendulum", Journal of sound and vibration, volume 294, Issue 3, pages 585-595.
- Grossman, Martin (2007). "N-link inverted pendulum, general energy equation", AT&P J. Plus1.
- Helbert Golstein, Charles Poole, Jhon Safko (2003). "Classical Mechanics", Third edition, Addison Wesley.
- Jan Awrejcewicz and Grzegorz Kudra (2008). "Dynamics of a real triple pendulum – modeling and experimental observation", ENOC 2008, Saint Petersburg, Russia, June 30 – July 4.

- Jan Awrejcewicz, Grzegorz Kudra (2007). "The triple pendulum with barriers and the piston-connecting rod-crankshaft model", Journal of theoretical and applied mechanics, 45, 1, pp. 15-23.
- Jan Awrejcewicz, Grzegorz Kudra, Grzegorz Wasilewsky (2007). "Experimental and numerical investigation of chaotic regions in the physical pendulum", Nonlinear Dynamic, 50:755-766.
- John P. Berdahl and Karel Vander Lugt (2001). "Magnetically driven chaotic pendulum", Am. J. Phys., Vol. 69, No. 9, pp 1016-1019.
- Luis Lara, César Stoico, Rodrigo Machado, Mario Castagnino (2003). "Estimación de exponentes de Lyapunov", Mecánica Computacional Vol. XXII, Bahía Blanca, Argentina.
- M. V. Plissi, C. I. Torrie and M. Barton, N. A. Robertson (2004). "An investigation of eddy-current damping of multi-stage pendulum suspensions for use in interferometric gravitational wave detector", Rev. Sci. Instr., Vol. 75, No. 11.
- Michele Aicardi (2007). "A triple pendulum robotic model and a set of simple parametric functions for the analysis of the golf swing", International Journal of Sport Science and Engineering, Vol. 1 No. 2 pp. 75-86.
- Morgan, Troy A (2007). "The use of innovative base isolation systems to achieve complex seismic performance objective", PhD dissertation, University of California, Berkeley, USA.
- Ruet, Laurent (2007). "Active control and sensor noise filtering duality application to advanced LIGO suspension", Thesis, Ins. Nat. Sci. App. de Lyon.
- Schmitt, Alfred A., Bender, Jan S. (2005). "Impulse based dynamic simulation of multibody systems: numerical comparison with standard methods", Proc. Automation of Discrete Production Engineering, pp. 324-329.
- Wu, Wan (2007). "Instrumentation of the next generation gravitational wave detector: Triple pendulum suspension and electro-optic modulator", Thesis Diss., University of Florida, USA.

### ***Authorization and Disclaimer***

*Authors authorize LACCEI to publish the paper in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.*