

# **Análisis de la Caída de un Cuerpo utilizando Modellus con soporte de la Plataforma Dokeos**

**Hernán Portero**

Escuela Politécnica del Ejército, Latacunga, Ecuador, hportero2012@gmail.com

**Iván Collantes**

Escuela Politécnica del Ejército, Ambato, Ecuador, ibcollantes@espe.edu.ec

## **RESUMEN**

Nuestro objetivo principal es demostrar el movimiento circular y parabólico de una partícula en caída libre en un marco de referencia móvil. Descartando la resistencia del aire y considerando las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la partícula en movimiento, tomando en cuenta que la velocidad horizontal permanece constante, mientras su componente vertical es variable y está sujeta a una aceleración constante que es la gravedad. La partícula choca en la superficie y rebota, debido a la conservación del movimiento. Mediante Modellus determinaremos el modelo matemático con las diferentes ecuaciones del movimiento de la partícula; este modelo matemático permite variar algunos parámetros obteniendo así diferentes modelos para resolver problemas típicos de física que se analizan en los primeros niveles de la Universidad, constituyéndose en una herramienta de gran importancia que nos permitirá comprobar estos movimientos virtuales comparados con la realidad. Este análisis demostrativo se subirá completamente a una aula virtual de software libre (Dokeos) para llegar a estudiantes que toman los cursos a distancia y aprovechar la tecnología actual en el proceso de la Enseñanza y el Aprendizaje.

**Palabras claves:** Partícula, Movimiento, Modelo Matemático, Modellus, Dokeos.

## **ABSTRACT**

Our main objective is to demonstrate the circular and parabolic movement of a particle in free fall in a mark of reference motive. Discarding the resistance of the air and whereas clause the horizontal and vertical components of the speed of the particle in movement, taking into account that the horizontal speed remains constant, while its vertical component is variable and it is subject to a constant acceleration that is the graveness. The particle collides in the surface and it bounces, due to the conservation of the movement. By means of Modellus we will determine the mathematical pattern with the different equations of the movement of the particle; this mathematical model allows to vary some parameters obtaining this way different models to solve typical problems of physics that are analyzed in the first levels of the University, being constituted in a tool of great importance that will allow to be proven these virtual movements compared with the reality. This demonstrative analysis you will ascend completely to a virtual classroom of free software (Dokeos) to arrive to students that take the courses at distance and to take advantage of the current technology in the process of the Teaching and the Learning.

**Keywords:** Particle, Movement, Mathematical Model, Modellus, Dokeos.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Mediante el uso de una herramienta informática, Modellus, se puede construir un modelo matemático para la simulación de movimientos. La Física tiene como finalidad brindar la comprensión de los conceptos fundamentales, leyes y principios de la mecánica clásica, así tenemos el principio de conservación de movimiento

como parte fundamental en el proceso de formación científica del estudiante para que pueda aplicarlos tanto en el campo profesional como en el desarrollo de nuevas tecnologías y en el análisis para la resolución de problemas.

Modellus es una herramienta de gran apoyo en el aula, permitiendo comprobar y demostrar en el laboratorio los diferentes fenómenos físicos y enriqueciendo los trabajos prácticos tanto a los estudiantes como a los docentes. Este experimento es una representación sencilla de ciertos fenómenos analizados por Galileo.

### 1.1 OBJETIVOS

Demostrar el movimiento circular, parabólico y la conservación del movimiento de una partícula, utilizando la herramienta tecnológica Modellus que nos permite realizar una animación y representación gráfica del modelo matemático.

- Introducir al estudiante en el estudio del movimiento circular, parabólico y el impacto de las partículas.
- Comprobar la validez del método algebraico a través de la animación y experimentación de los resultados obtenidos de Modellus, comprobando con la experiencia realizada en el laboratorio.
- Inculcar en el estudiante hábitos de análisis y razonamiento, tendiendo a despertar inquietudes investigativas en base a los fenómenos naturales.
- Relacionar los fenómenos con los respectivos modelos matemáticos y teóricos, con los modelos experimentales.

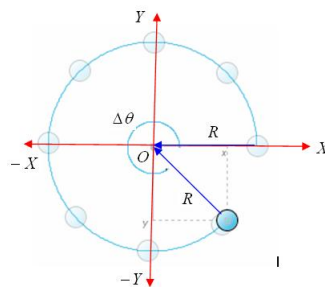
## 2. CINEMÁTICA

La Cinemática es la rama de la mecánica clásica que estudia las leyes del movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas que lo producen, limitándose, esencialmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo.

Para el estudio de la Cinemática se utiliza un sistema de coordenadas para describir las trayectorias, denominado sistema de referencia. Todas las cosas del mundo físico están en movimiento: desde las más grandes hasta las más pequeñas

### 2.1 MOVIMIENTO CIRCULAR

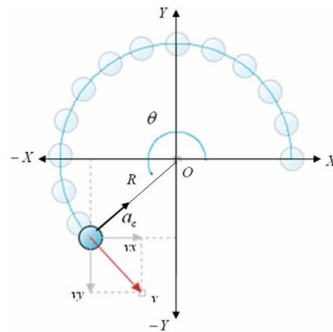
Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje, sus puntos describen trayectorias circulares en planos perpendiculares al eje, mientras la partícula se desplaza por la trayectoria circular su vector posición barre ángulos centrales  $\Delta\theta$ .



**Figura 1: Movimiento circular**

## 2.2 POSICIÓN ANGULAR

Es el ángulo  $\theta$  que existe ente el vector posición de la partícula y un eje de referencia que generalmente es X



**Figura 2: Posición angular**

## 2.3 DESPLAZAMIENTO ANGULAR

Es la variación neta de la posición angular de una partícula, respecto a un sistema de referencia  $\Delta\theta = \theta - \theta_o$

## 2.4 LA VELOCIDAD ANGULAR

Está definida como el desplazamiento angular respecto del tiempo, y se representa mediante un vector perpendicular al plano de rotación; su sentido se determina aplicando la *regla de la mano derecha*.

$$w_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad w_m = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} \qquad w_m = \frac{2\pi}{T} \qquad w_m = 2\pi f$$

## 2.5 ACELERACIÓN ANGULAR

Es la razón entre la variación de la velocidad angular que experimenta una partícula y el intervalo de tiempo en que se produjo, y se representa por un vector análogo al de la velocidad angular, pero puede o no tener el mismo sentido (según acelere o retarde).

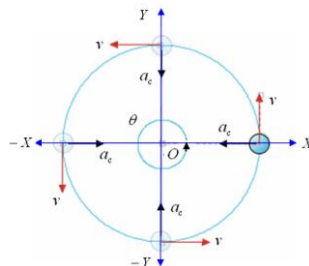
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Las direcciones de la velocidad tangencial y de la aceleración centrípeta, son perpendiculares.

$$ac = \frac{v^2}{R} \qquad v = wR$$

v= velocidad lineal

R = radio de la trayectoria



**Figura 3: Aceleración angular**

## 2.6 MOVIMIENTO PARABÓLICO

El tiro parabólico es un ejemplo de movimiento realizado por un cuerpo en dos dimensiones o sobre un plano.

El movimiento parabólico se puede analizar como la composición de dos movimientos rectilíneos distintos: uno horizontal (según el eje x) de velocidad constante y otro vertical (según eje y) uniformemente acelerado, con la aceleración gravitatoria; la composición de ambos da como resultado una trayectoria parabólica.

### 2.6.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME HORIZONTAL

Se presenta a lo largo del eje X con una velocidad  $v_{ox} = v_x$  constante.

$$a_x = 0 \qquad v_x = v_o \cos \theta \qquad x_A = v_o \cos(\theta)t$$

### 2.6.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME ACELERADO VERTICAL

Se presenta a lo largo del eje Y, con velocidad inicial  $v_{oy}$  hacia arriba.

$$a_y = -g \qquad v_y = v_o \sin(\theta) - gt \qquad y = v_o \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

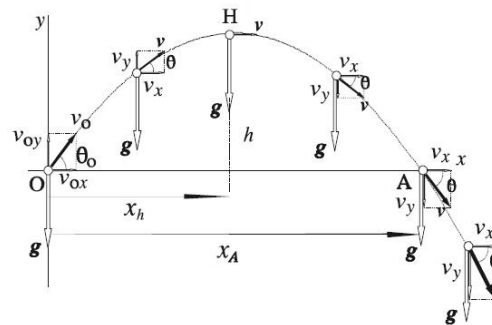


Figura 4: Movimiento parabólico

## 2.7 DISPARO DE PROYECTILES

Los parámetros más importantes del movimiento parabólico a más de conocer el valor de la aceleración, son el valor de la velocidad inicial de lanzamiento y el ángulo que se forma con respecto a la horizontal

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = v_o \cos(\theta)t$$

$$y = y_0 + v_o \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Eliminado el tiempo t, obtenemos la ecuación de la trayectoria (ecuación de una parábola)

$$y = x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2 \theta}$$

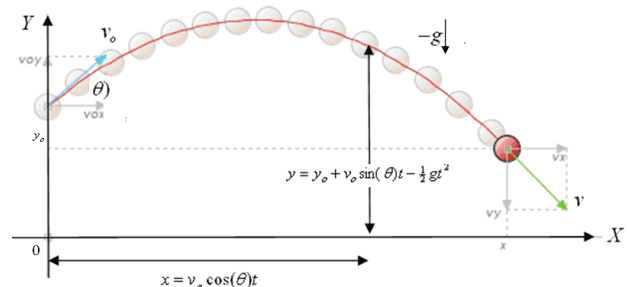


Figura 5: Disparo de proyectiles

### 2.7.1 ALCANCE HORIZONTAL

Es el alcance máximo de una partícula lanzada y se obtiene cuando  $y = 0$

La partícula estará avanzando horizontalmente a la velocidad constante  $v_{ox}$  durante el tiempo de vuelo, que será  $2t$  (siendo  $t$  el tiempo en alcanzar la altura máxima) ya que el móvil tarda lo mismo en subir que en bajar, por lo tanto el alcance es:

$$x_{máx} = v_{ox} 2t \quad \text{es decir}$$

$$\text{alcance máximo} \quad x_{máx} = \frac{v_o^2 \sin(2\theta)}{g}$$

el valor máximo se obtiene cuando  $\theta = 45^\circ$

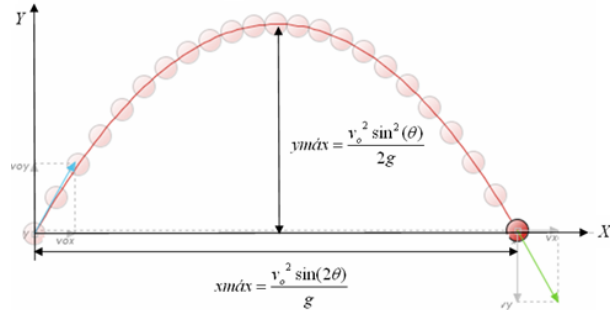


Figura 6: Alcance horizontal

### 2.7.2 ALTURA MÁXIMA

Es la altura máxima que alcanza un proyectil y se obtiene cuando  $v_{0y} = 0$ , es decir  $v_{fy}^2 = v_{0y}^2 - 2gh$ .

Su valor máximo se obtiene para el ángulo de disparo  $\theta = 90^\circ$ .

### 2.7.3 TIEMPO DE VUELO

Es el tiempo total que la partícula permanece en movimiento.

## 2.8 TIRO PARABÓLICO CON ALTURA INICIAL

Se dispara un proyectil desde una altura  $y_o$  sobre un plano horizontal con velocidad inicial  $v_o$ , formando un ángulo  $\theta$  con la horizontal. Para describir el movimiento establecemos un sistema de referencia como se indica en la figura 7.

Las componentes de la velocidad del proyectil en función del tiempo son:

$$v_x = v_o \cos \theta \qquad v_y = v_o \sin(\theta) - gt$$

La posición del proyectil en función del tiempo es:

$$x = v_o \cos(\theta)t$$

$$y = y_o + v_o \sin(\theta)t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\frac{1}{2} gt^2 - v_o \sin(\theta)t + y - y_o$$

$$t = \frac{v_o \sin \theta \pm \sqrt{v_o^2 \sin^2 \theta - 4 \frac{g}{2} (y - y_o)}}{g}$$

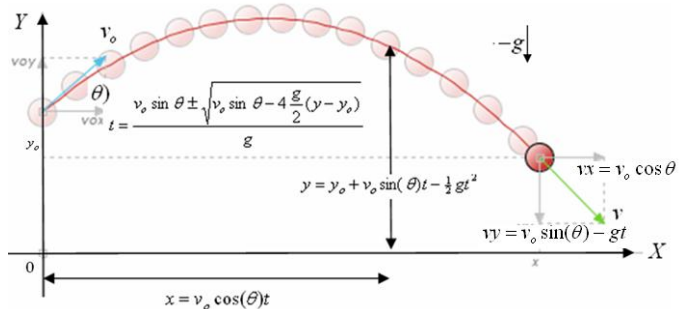


Figura 7: Tiro parabólico con altura inicial

### 3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso que la aceleró desde el reposo hasta su rapidez actual.

Puesto que  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ , podemos escribir la segunda Ley de Newton  $\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  ;  $\sum \vec{F} = m\vec{v}$

#### 3.1 IMPULSO

Es el producto de la fuerza neta que aceleró al cuerpo por el tiempo requerido para la aceleración.

#### 3.2 IMPACTO

Ocurre cuando dos cuerpos entran en colisión entre si durante un período muy corto de tiempo, generándose grandes fuerzas impulsivas.

Se clasifica en dos grupos:

##### 3.2.1 IMPACTO OBLICUO

Cuando el movimiento de una o ambas partículas forman un ángulo con la línea de impacto.

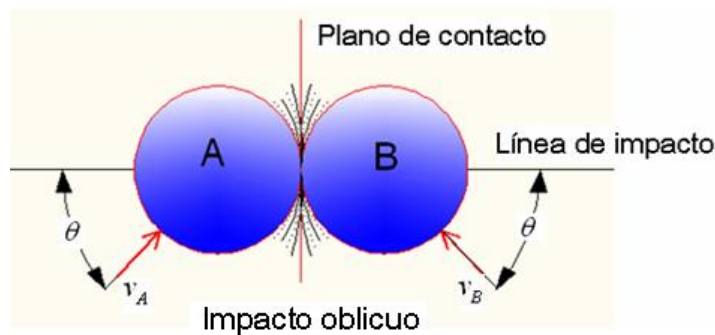


Figura 8: Impacto de partículas

##### 3.2.2 IMPACTO CENTRAL

Ocurre cuando la dirección del movimiento de los centros de masa de las dos partículas en colisión es a lo largo de una línea (línea de impacto) que pasa por los centros de masa de las partículas.

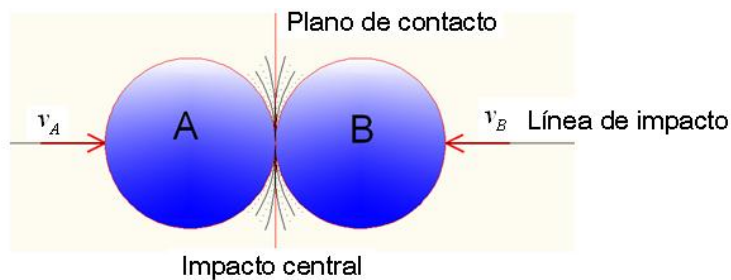


Figura 9: Línea de impacto

### 3.3 CHOQUE ELÁSTICO

Las fuerzas entre dos cuerpos son conservativas, de modo que no se pierde ni gana energía mecánica en el choque, La energía cinética total del sistema es la misma antes y después.

### 3.4 CHOQUE INELÁSTICO

Es cuando la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial. Un choque inelástico es el que los cuerpos se pegan y se mueven como uno solo después del choque.

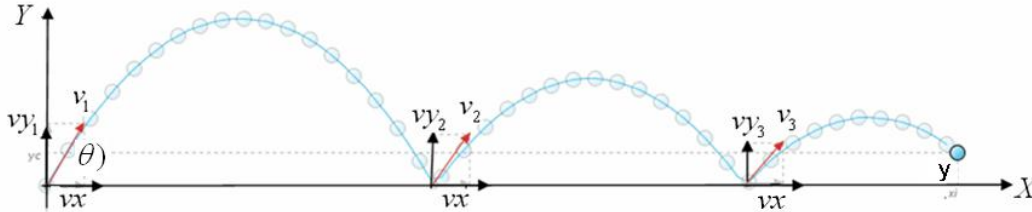


Figura 10: Choque inelástico

Siendo  $e = 1$  cuando la colisión entre las dos partículas es perfectamente elástica, en la realidad esto casi nunca sucede.

## 4. MODELLUS 4.01

Modellus es un simulador informático valioso para la enseñanza - aprendizaje de física que permite simulaciones de fenómenos físicos a partir de un modelo matemático, enriqueciendo de esta manera los trabajos prácticos del laboratorio y permitiendo analizar la concordancia entre el movimiento real (filmado) y un movimiento virtual (animado) que obedezcan a las leyes de la física.

Para producir en Modellus las animaciones hay que ingresar las diferentes ecuaciones las mismas que pueden ser modificadas de acuerdo a las necesidades educativas y el diseño de los distintos escenarios (casos simulación).

Este es un software libre que también proporciona una solución numérica de las ecuaciones, reproduciéndose en la computadora en una ventana, comprobando y demostrando la enseñanza - aprendizaje de los diferentes escenarios que regularmente se resuelven en el papel.

### 4.1 ESQUEMA DE MODELLUS

La pantalla principal o la ventana de animación debe ser modificada simplemente con el procedimiento "clic en los bordes y arrastrar".

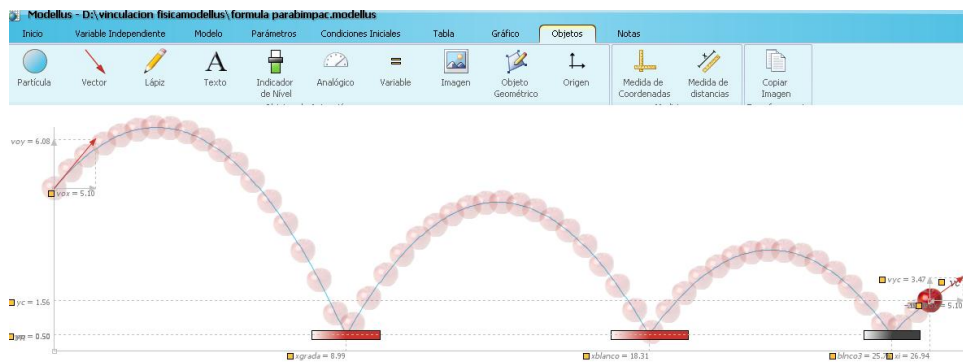


Figura 11: Ventana de Modellus

## 4.2 MODELO MATEMÁTICO

En cada línea se debe tener una expresión matemática. Cada línea tendrá un nombre de la variable. El primer valor de esta variable por defecto será cero y este valor puede ser modificado en la ventana de condiciones cuando el modelo se esté ejecutando y el nombre de la variable podrá tener caracteres alfanuméricos.

## 4.3 EJEMPLO DEMOSTRATIVO EN MODELLUS

Demostrar los movimientos de una partícula, mediante el movimiento circular, parabólico y el impacto en una superficie, mediante una animación y representación gráfica utilizando la herramienta tecnológica Modellus.

Así tenemos:

Una esferilla se suelta en el punto A ingresando a un tubo en forma de arco de circunferencia desliziéndose sin fricción y abandonándole en el punto C con un ángulo respecto a la vertical de  $45^\circ$  sabiendo que el radio es de 1.5m, determinar la distancia  $d$  desde el punto B de manera que la esferilla golpee una vez al piso D,  $h = 2.0\text{m}$  para luego caer en las gradas E,  $h = 2,30\text{m}$ , F,  $h = 2.50\text{m}$ , G,  $h = 2.80\text{m}$  tomando como  $e = 0.80$  como se indica las figuras 12 y 13.

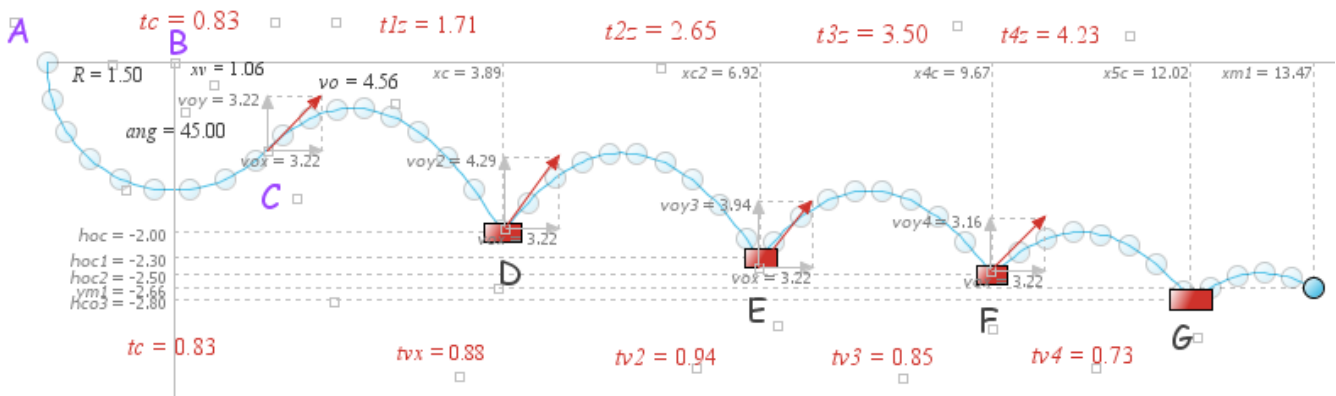


Figura 12: Ejecutando Modellus

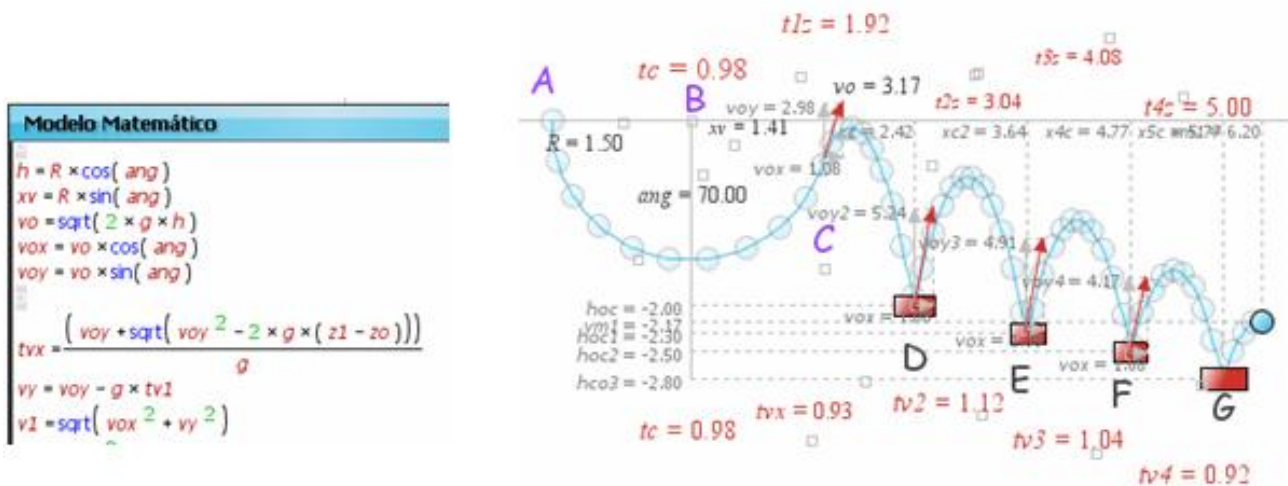


Figura 13: Cambiando los parámetros del ejercicio anterior, ángulo de  $70^\circ$



## 5. CONCLUSIONES

- Modellus es una herramienta orientada a la simulación y modelación de movimientos virtuales para la enseñanza de los fenómenos físicos, esta simulación de los movimientos han permitido manipular y comprobar los diferentes parámetros requerimientos en la simulación de los movimientos físicos
- Se ha demostrado la aplicación de las ecuaciones específicas del movimiento parabólico y conservación de las energías con la simulación virtual del movimiento de una partícula.
- Se ha podido comprobar los distintos escenarios aplicando las mismas ecuaciones, simplemente variando alguna de las condiciones iniciales.
- Con los resultados obtenidos en este modelado matemático se pudo concluir que el movimiento circular, parabólico se puede lograr una demostración de los movimientos de un cuerpo.

## 6. RECOMENDACIONES

- Se recomienda aplicar de manera ordenada las diferentes ecuaciones en los distintos escenarios para que no exista un desfase en la simulación de movimiento de una partícula en la aplicación del modelo físico
- Esquematizar un procedimiento lógico de la simulación física en forma manual en una hoja d papel para luego utilizar el modelo matemático.
- Realizar varias veces los procedimientos si es necesario hasta que concuerde la aplicación de las ecuaciones matemáticas de los distintos parámetros para conseguir el objetivo deseado.

## REFERENCIAS

- Serway, R.A. (1997). *Física*, 4ª edición, McGraw Hill, Estados Unidos de América.
- Vallejo, P. y Zambrano J. (2009). *Física*, 7ª edición, Ediciones Rodín, Ecuador.
- Fishbane, S. y Gasiorowicz, S.T. (2010). *Physics for scientist and engineers*, 3th edition, McGraw Hill International, Singapore.
- Tinoco, S. y Milachay, Y. (2011). *Manual para el uso del programa Modellus*, [http://www.didactika.com/docentes/files/manual\\_modellus.pdf](http://www.didactika.com/docentes/files/manual_modellus.pdf), 12/02/12.
- Pecquet, E. (2007). *Creando y publicando cursos virtuales con Dokeos*, [http://www.dokeos.com/doc/teacher\\_manual\\_spanish.pdf](http://www.dokeos.com/doc/teacher_manual_spanish.pdf), 22/02/12.

### ***Autorización y Renuncia***

*Los autores autorizan a LACCEI para publicar el escrito en las memorias de la conferencia. LACCEI o los editores no son responsables ni por el contenido ni por las implicaciones de lo que esta expresado en el escrito*