

# **Vibraciones de Vigas utilizando el Método de Elementos Finitos y la Transformada de Laplace**

**José Santiago Cruz Bañuelos**

Universidad de Monterrey, Monterrey, México, scruz@udem.edu.mx

## **RESUMEN**

La ecuación diferencial que modela las vibraciones transversales de vigas, junto con sus condiciones de frontera, forman un problema con valores en la frontera que presenta un reto intelectual al tratar de obtener una solución analítica al cálculo de las deflexiones dependientes del tiempo y espacio, la forma de la ecuación diferencial que modela estas vibraciones impiden obtener una solución exacta. Entonces buscamos una solución aproximada, el método de elementos finitos permite obtener una solución de este tipo, para ello es necesario discretizar el espacio y el tiempo, la discretización del tiempo en diferencias finitas provoca problemas de estabilidad, en este trabajo solo se discretiza el espacio utilizando el método de elementos finitos y para evitar la discretización del tiempo utilizamos la transformada de Laplace que básicamente transforma la segunda derivada de la deflexión con respecto al tiempo y con ello la discretización del tiempo ya no es necesaria. La formulación de elementos finitos que presentamos en este trabajo no presenta problemas de estabilidad y no es necesario realizar un proceso iterativo como se hace tradicionalmente en los problemas que involucran el tiempo.

**Palabras claves:** vibraciones, vigas, elementos finitos, Laplace, discretización

## **ABSTRACT**

The differential equation that models the cross-sectional vibrations of beams, along with its boundary conditions, forms a boundary value problem that presents an intellectual challenge when trying to obtain an analytical solution to the calculation of the dependent deflections of the time and space, the form of the differential equation that models these vibrations prevents to obtain an exact solution. Then we looked for an approximated solution, the method of finite elements allows to obtain a solution of this type, for it is necessary to divide the space and the time, the discretization of the time in finite differences brings about stability problems, in this work we only divide the space using the method of finite elements and to be avoided the discretization of the time we used the Laplace transform who basically transforms second derivative from the deflection with respect to the time and in this way the discretization of the time no longer is necessary. The formulation of finite elements that we present in this work does not show stability problems and it is not necessary to do an iterative process since it is made traditionally in the problems that involve the time.

**Keywords:** vibrations, beams, finite element, Laplace, discretization

## **1. INTRODUCCIÓN**

En este trabajo presentamos un procedimiento para resolver el problema de vibraciones transversales de vigas, la ecuación diferencial involucrada junto con sus condiciones de frontera crean un problema con valores en la frontera el cual presenta dificultades para obtener una solución analítica, por lo anterior es necesario obtener una solución aproximada, el método de elementos finitos es una alternativa para obtener este tipo de soluciones, para

ello es necesario discretizar el espacio y el tiempo, la discretización del espacio es el procedimiento natural del método de elementos finitos y la discretización del tiempo se hace utilizando diferencias finitas. Lo anterior involucra el ensamble de dos matrices, una llamada matriz de rigidez y la otra llamada matriz de masa, la matriz de rigidez es generada por la discretización del espacio y la matriz de masa es generada por la discretización del tiempo; la matriz de masa es involucrada con el tamaño del intervalo de tiempo y esto puede provocar problemas de estabilidad, por ello es necesario saber seleccionar adecuadamente dicho intervalo, existen esquemas para ellos entre los más comunes se encuentra el esquema de Newmark (Reddy 2006a). En este trabajo proponemos un procedimiento en el cual evitamos la discretización del tiempo, para ello tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial parcial que modela las vibraciones de vigas, eso permite que la segunda derivada de la deflexión con respecto al tiempo se transforme en una función que depende del espacio y del dominio de la frecuencia compleja que implica la transformada de Laplace, tenemos entonces ahora una ecuación diferencial que no incluye derivadas con respecto al tiempo y solo se incluye la cuarta derivada con respecto al espacio. Sobre esta nueva ecuación diferencial se lleva a cabo la formulación de elementos finitos y la solución aproximada que se obtiene está compuesta por funciones del espacio que son conocidas y por parámetros desconocidos que dependen de la frecuencia compleja, se realiza la discretización del espacio y se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas en el cual se incluye la matriz de rigidez ensamblada, el vector de parámetros desconocidos y el vector de cargas. Se aplican las condiciones de frontera y se resuelve el sistema de ecuaciones, con este procedimiento conocemos ahora las expresiones para los parámetros que dependen de la frecuencia compleja; tomamos la transformada inversa de Laplace a estos parámetros y ahora dichos parámetros dependen del tiempo, con esto podemos conocer ahora la solución aproximada a nuestro problema de vibraciones de vigas y podemos calcular las deflexiones para cualquier tiempo.

## 2. VIBRACIONES TRANSVERSALES DE VIGAS

Las vibraciones transversales de vigas involucran una ecuación diferencial parcial, condiciones de frontera y condiciones iniciales, la ecuación diferencial se presenta en (1)

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = f(x, t) \quad (1)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de masa del material,  $A$  es el área de sección transversal del material,  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  $I$  es el momento de inercia de área de la viga,  $w$  es la deflexión transversal de la viga y  $f(x, t)$  es la carga distribuida por unidad de longitud que actúa sobre la viga; la figura 1 muestra la viga con dicha carga.

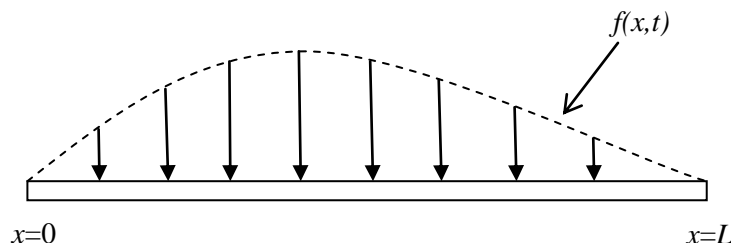


Figura 1: Viga con carga distribuida

Por lo regular  $\rho$  y  $E$  son constantes lo cual significa que el material es homogéneo; si el área de sección transversal es variable entonces podemos decir lo siguiente

$$A = A_0 g_1(x), \quad I = I_0 g_2(x) \quad (2)$$

Donde  $A_0$  e  $I_0$  son el área de sección transversal y el momento de inercia de área a  $x=0$ . De igual manera la carga distribuida de la viga se puede expresar como

$$f(x,t) = f_0 g(x,t) \quad (3)$$

Donde  $f_0$  es el máximo valor de la fuerza distribuida, con la información mostrada en (2) y (3) la ecuación diferencial en (1) se transforma de la siguiente manera

$$\rho A_0 g_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( g_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = f_0 g \quad (4)$$

Proponemos ahora los siguientes cambios de variable

$$y = \frac{x}{L}, \quad u = \frac{w}{L}, \quad g_0 = \frac{f_0 L^3}{EI_0} \quad y \quad T = \frac{t}{R} \quad R = \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}} \quad (5)$$

Donde  $L$  es la longitud de la viga, utilizando los cambios propuestos en (5) la ecuación diferencial mostrada en (4) toma la forma

$$g_1 \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( g_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = g_0 g \quad (6)$$

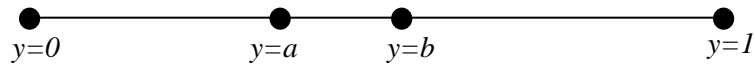
La ecuación diferencial mostrada en (6) está expresada en función de las variables adimensionales  $y$ ,  $u$  y  $T$ ; debido a la naturaleza de la ecuación diferencial, a las condiciones de frontera, la carga distribuida sobre la viga y a la geometría de la viga no es posible obtener una solución exacta del problema, aplicaremos entonces el método de elementos finitos para obtener una solución aproximada.

### 3. DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO EN ELEMENTOS FINITOS

La solución de problemas de vibraciones utilizando el método de elementos finitos y la transformada de Laplace fue reportada por primera vez en la solución de problemas de estructuras (Beskos y Narayanan, 1983), para obtener la transformada inversa de Laplace se utilizó un método numérico, en este trabajo obtenemos dicha transformada inversa de manera exacta. También se reporta la formulación de dos ecuaciones utilizando la

transformada de Laplace aplicada a dos ecuaciones acopladas incluyendo la aplicación del principio de Hamilton sin utilizar una transformación integral (Chen, 1995). En otro trabajo se utiliza la transformada de Laplace para desacoplar dos ecuaciones diferenciales que modelan el contacto entre dos vigas (Fung et al., 1999), lo anterior facilita la obtención de la transformada inversa de Laplace.

Nuestro propósito ahora es calcular una solución aproximada para  $u$  expresada en la ecuación diferencial mostrada en (6), para ello discretizamos el dominio del problema definido en  $0 < y < 1$  para formar una malla de elementos finitos, la figura 2 muestra un elemento que pertenece a la malla, dicho elemento está limitado por sus coordenadas  $y=a$  y  $y=b$ .



**Figura 2: Elemento finito que pertenece a la malla definida entre  $y=0$  y  $y=1$**

Proponemos entonces una solución aproximada para cada elemento de la malla, dicha solución aproximada está representada por  $U$  y se pretende que sea lo más aproximada posible a  $u$ ; obviamente la solución aproximada para en el elemento no satisface la ecuación diferencial (6).

$$g_1 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - g_0 g \neq 0 \quad a \leq y \leq b \quad (7)$$

Debido a que la solución aproximada no satisface la ecuación diferencial, como se puede observar en (7), entonces definimos una función residual mostrada en (8).

$$R(y, T) = g_1 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - g_0 g \quad a \leq y \leq b \quad (8)$$

Ante la imposibilidad de poder satisfacer la ecuación diferencial proponemos que el promedio ponderado del residuo en el elemento sea cero, esto se muestra en (9).

$$\int_a^b \left[ g_1 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - g_0 g \right] \varphi_i(y) dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Donde  $\varphi_i(y)$  son conocidas como funciones de ponderación; la ecuación mostrada en (9) se puede dividir en 3 términos integrales, en particular el término que involucra la derivada de  $w$  con respecto a la variable  $y$  requiere de integración por partes dos veces para compartir la derivada con la función de ponderación, después de este procedimiento la ecuación (9) se transforma en:

$$\int_a^b g_1 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \varphi_i dy + \int_a^b g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{d^2 \varphi_i}{dy^2} dy =$$

$$-\varphi_i V|_a^b + \left. \frac{d\varphi_i}{dy} M \right|_a^b + \int_a^b g_0 g \varphi_i dy$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$
(10)

Donde:

$$V = \frac{\partial}{\partial y} \left( g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad y \quad M = g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$
(11)

La solución aproximada  $w$  estará compuesta por funciones conocidas y parámetros desconocidos, dicha solución la podemos escribir de la forma mostrada en (12)

$$U(y, T) = \sum_{j=1}^n a_j(T) \varphi_j(y)$$
(12)

Sustituyendo (12) en (10) obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{a}_j + \sum_{j=1}^n K_{ij} a_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$
(13)

Donde

$$M_{ij} = \int_a^b g_1 \varphi_i \varphi_j dy \quad K_{ij} = \int_a^b g_2 \frac{d^2 \varphi_i}{dy^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} dy$$

$$F_i = \int_a^b g_0 g \varphi_i dy - \varphi_i V|_a^b + \left. \frac{d\varphi_i}{dy} M \right|_a^b$$
(14)

Para la solución aproximada mostrada en (12) se utilizan cuatro términos en la aproximación, donde las cuatro funciones se muestran en (15)

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y) &= 1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \\
\varphi_2(y) &= -L\beta(1 - \beta)^2 \\
\varphi_3(y) &= 3\beta^2 - 2\beta^3 \\
\varphi_4(y) &= -L\beta(\beta^2 - \beta) \\
\beta &= \frac{y - a}{L} \quad y \quad L = b - a
\end{aligned} \tag{15}$$

El sistema de ecuaciones mostrado en (13) involucra  $a_j$  y  $\ddot{a}_j$ , lo que se realiza normalmente es la discretización del tiempo para que  $\ddot{a}_j$  se exprese en función de  $a_j$ , esto es conocido como el método de Newmark, nosotros aplicaremos la transformada de Laplace a (13) y obtenemos

$$\sum_{j=1}^4 R_{ij} \mathcal{L}\{a_j\} = c + \sum_{j=1}^4 M_{ij} s a_j(0) + \sum_{j=1}^4 M_{ij} \dot{a}_j(0), \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{16}$$

Donde

$$R_{ij} = M_{ij} s^2 + K_{ij}, \quad b_j = \mathcal{L}\{a_j\}, \quad Q_i = \mathcal{L}\{F_i\} \tag{17}$$

$R_{ij}$  es una matriz simétrica de tamaño 4 por 4, el sistema mostrado en (16) representa un elemento de la malla mostrada en la figura 2, es necesario entonces decidir el tamaño de la malla para poder estimar el tamaño de la matriz ensamblada que resulta de la interacción de todos los elementos, si la malla incluye dos elementos entonces tendremos tres nodos y una matriz ensamblada de tamaño 6x6, en general dicha matriz será cuadrada de tamaño igual al doble del número de nodos involucrados. Por lo anterior tenemos un sistema de ecuaciones que representa la discretización del dominio en elementos finitos, a continuación aplicamos las condiciones de frontera para obtener el sistema final de ecuaciones en la cual no necesariamente todos los parámetros son desconocidos. La solución aproximada en cada elemento está compuesta por cuatro funciones de la variable espacial  $y$ , y por cuatro parámetros funciones de la frecuencia compleja  $s$  tal como es mostrado en (16), ahora tomamos la transformada inversa de Laplace y obtenemos la solución aproximada en función de la variable espacial  $y$ , y del tiempo.

$ U(x, T) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^n b_j(s) \varphi_j(y) \right\} = \sum_{j=1}^n \mathcal{L}^{-1}\{b_j(s)\} \varphi_j(y) = \sum_{j=1}^n a_j(T) \varphi_j(y) \tag{18} $	(18)
---	------

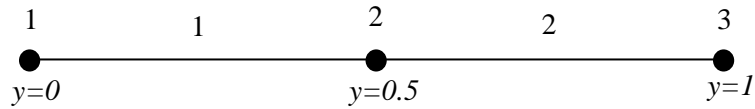
Conocemos ahora la solución aproximada para las vibraciones de vigas para cualquier punto y para cualquier tiempo.

#### 4. SOLUCIÓN DE CASOS DE INTERÉS

En este trabajo se resuelven dos problemas de interés reportados en la literatura (Reddy, 2006b), el primer problema consiste en una viga de longitud 1, fija en sus dos extremos, con una fuerza distribuida cero, velocidad inicial cero, el resto de la información está mostrada en (19)

$$u_0 = \sin(\pi y) - \pi y(1 - y), \quad R = 1, \quad g_1 = g_2 = 1 \quad (19)$$

Discretizamos el dominio en varios elementos finitos y obtendremos una solución en cada uno de ellos, a manera de ejemplo discretizaremos el dominio en dos elementos finitos, la figura 3 muestra la malla correspondiente.



**Figura 3: Malla con dos elementos finitos**

En la figura 3 podemos observar la malla de elementos finitos que consiste en dos elementos y 3 nodos, entonces la matriz ensamblada será de tamaño 6 por 6 y los parámetros desconocidos serán 6, tenemos entonces dos soluciones, una para cada elemento y son mostradas en (20)

$$U^{(1)}(y, s) = b_1(s)\varphi_1^{(1)}(y) + b_2(s)\varphi_2^{(1)}(y) + b_3(s)\varphi_3^{(1)}(y) + b_4(s)\varphi_4^{(1)}(y) \quad (20)$$

$$U^{(2)}(y, s) = b_3(s)\varphi_1^{(2)}(y) + b_4(s)\varphi_2^{(2)}(y) + b_5(s)\varphi_3^{(2)}(y) + b_6(s)\varphi_4^{(2)}(y)$$

La viga está fija en sus extremos, entonces las condiciones de frontera consideradas implican que el desplazamiento y la rotación en  $y=0$  y en  $y=1$  son iguales a cero, entonces los parámetros  $b_1=b_2=b_5=b_6=0$  y las incógnitas en los extremos fijos serían la fuerza y el momento de reacción. Por lo anterior obtenemos entonces un sistema de ecuaciones de la forma mostrada en (21).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & K_{13}^{(1)}s^2 + K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(1)}s^2 + K_{14}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K_{23}^{(1)}s^2 + K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(1)}s^2 + K_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{(1)}s^2 + K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(1)}s^2 + K_{34}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{43}^{(1)}s^2 + K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(1)}s^2 + K_{44}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53}^{(1)}s^2 + K_{53}^{(2)} & K_{54}^{(1)}s^2 + K_{54}^{(2)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K_{63}^{(1)}s^2 + K_{63}^{(2)} & K_{64}^{(1)}s^2 + K_{64}^{(2)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -V_0 \\ -M_0 \\ b_3 \\ b_4 \\ V_L \\ M_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1s \\ b_2s \\ 0 \\ 0 \\ b_5s \\ b_6s \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones mostrado en (21) obtenemos las soluciones mostradas en (22)

$$b_3 = \frac{0.2225 s}{s^2 + 516.92}, b_4 = \frac{0.20 \times 10^{-16} s(s^2 + 4705.24)}{(s^2 + 516.92)(s^2 + 6719.83)} \quad (22)$$

Las expresiones mostradas en (22) se pueden sustituir ahora en (20) y obtenemos las expresiones para las soluciones en los elementos 1 y 2. Tomamos entonces la transformada inversa de Laplace en la solución para cada elemento y obtenemos la solución para cada elemento en función del tiempo y el espacio, tal como es mostrado en (23).

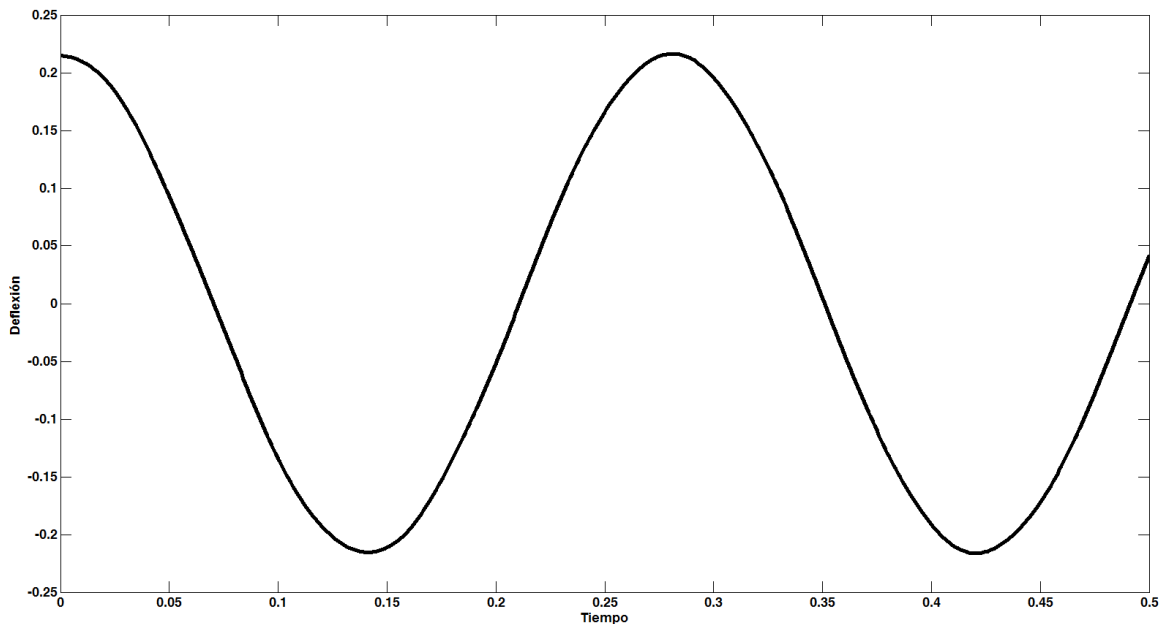
$$U^{(1)}(y, t) = a_3(t)\varphi_3^{(1)}(y) + a_4(t)\varphi_4^{(1)}(y) \quad (23)$$

$$U^{(2)}(y, t) = a_3(t)\varphi_1^{(2)}(y) + a_4(t)\varphi_2^{(2)}(y)$$

Donde las expresiones para  $a_3(t)$  y  $a_4(t)$  se obtienen tomando la transformada inversa de Laplace de  $b_3(s)$  y  $b_4(s)$ , son mostradas en (24)

$$a_3 = 0.22 \cos(22.74 t), a_4 = 0.14 \times 10^{-16} \cos(22.74 t) + 0.65 \times 10^{-17} \cos(81.98 t) \quad (24)$$

Es evidente que el término  $a_4(t)$  tiende a cero y no influirá en la solución, lo anterior debido a que ese término es la rotación de la viga, la derivada de la deflexión, en el centro de la viga. Para lograr una mejor solución se puede utilizar una malla que tenga más elementos finitos. Utilizando una malla de 8 elementos y 9 nodos se obtiene un resultado igual al reportado en la literatura (Reddy, 2006c) cuando se utiliza la discretización del tiempo, en la tabla 1 se muestra la deflexión del centro de la viga para diferentes momentos entre  $t=0$  y  $t=0.5$  segundos.





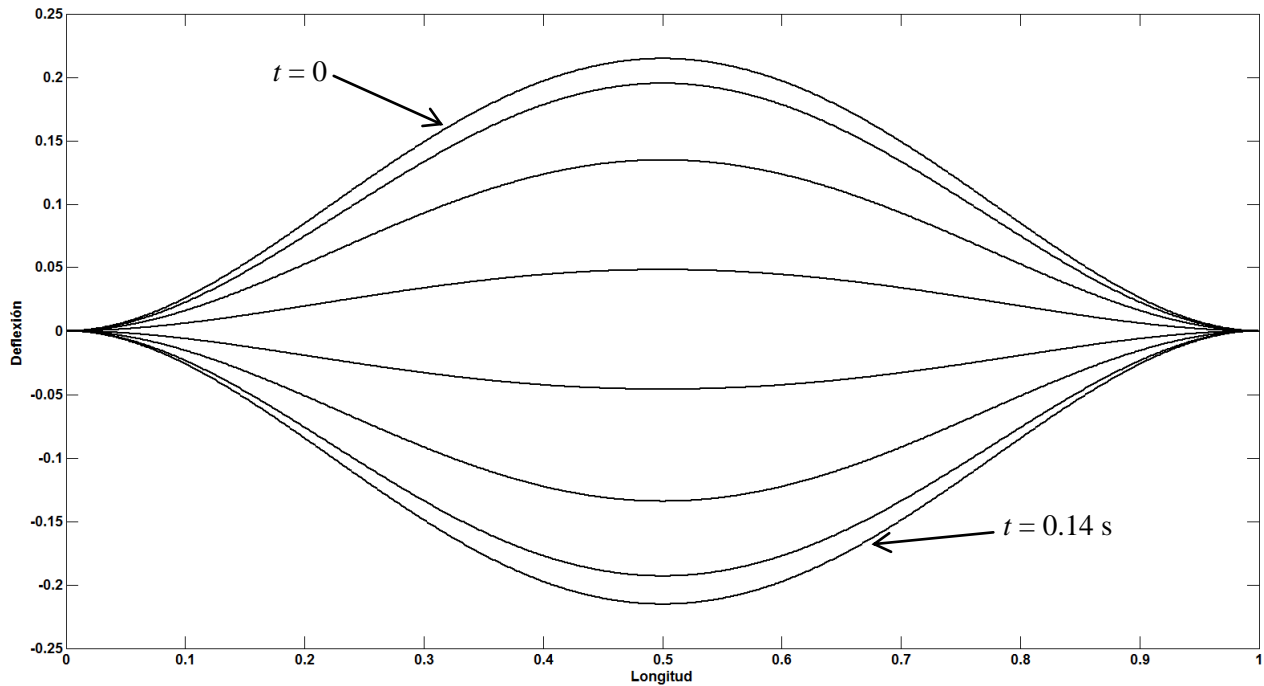
**Figura 4: Deflexión del centro de la viga variando en el tiempo**

La figura 4 muestra la gráfica de la deflexión del centro de la viga para el intervalo entre  $t=0$  y  $t=0.5$  segundos, en dicha gráfica se puede observar que el período de vibración es  $t=0.28$  segundos. Si estamos interesados en calcular la fuerza y el momento de reacción en los extremos de la viga podemos hacerlo sabiendo que eran las incógnitas en el sistema de ecuaciones resuelto en (21).

Es posible también poder graficar la deflexión de toda la viga para cualquier tiempo y de esta manera poder tener una idea clara de las vibraciones que se llevan a cabo en la misma. La figura 5 muestra dichas deflexiones para el intervalo de 0 a 0.14 segundos que equivale a el tiempo para la mitad del período, es importante observar que está gráfica es acorde con la información reportada por otros autores (Reddy, 2006d) cuando se discretiza el tiempo utilizando diferencias finitas.

**Tabla 1: Deflexión del centro de la viga para diferentes tiempos**

Tiempo ( $t$ )	Deflexión del centro de la viga $w(0.5, t)$
0	0.2146
0.1	-0.1342
0.2	-0.0514
0.3	0.1957
0.4	-0.1915
0.5	0.0418



**Figura 5: Deflexión de la viga variando en el tiempo**

## 5. CONCLUSIONES

La formulación de elementos finitos para la solución de problemas de vibraciones transversales de vigas, presentada en este trabajo, presenta resultados similares a los que se obtienen cuando se discretiza el dominio del tiempo utilizando el método de diferencias finitas. En este trabajo solo se discretiza el espacio en elementos finitos y el dominio del tiempo no es discretizado debido a que la segunda derivada de la deflexión con respecto al tiempo es desaparecida con la aplicación de la transformada de Laplace sobre la ecuación diferencial parcial que modela estas vibraciones. Con ello se obtiene una solución aproximada en donde el tiempo está explícito siempre y los resultados se pueden evaluar para cualquier tiempo, con lo anterior se evitan problemas de estabilidad.

## REFERENCIAS

- Beskos, D.E. and Narayanan G.V. (1983). "Dynamic response of frameworks by numerical laplace transform". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, Issue 3, Pages 289–307.
- Chen T-M (1995). "The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, Issue 3, pages 509–522.
- Fung, R.-F., Tsen, C.R. and Yao, C.-M. (1999). "Dynamic simulation of a bimodal ultrasonic motor by new hybrid Laplace transform/finite element method". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, Issue 4, Pages 625–644
- Reddy, J.N. (2006). *Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw-Hill.

### ***Autorización y Renuncia***

*Los autores autorizan a LACCEI para publicar el escrito en las memorias de la conferencia. LACCEI o los editores no son responsables ni por el contenido ni por las implicaciones de lo que esta expresado en el escrito*