

Determinación y Análisis de la gráfica Momento - Curvatura de diferentes secciones de vigas de concreto reforzado.

Delma V. Almada N., Msc¹, Josué Noel Bárcena A., Msc¹, Mauricio Enciso T., Msc¹.

¹Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, México, dalmada@itesm.mx, a00805938@itesm.mx, mauricio.encisot@hotmail.com

El comportamiento de vigas de concreto reforzado puede ser analizado a través de generar la gráfica Momento - Curvatura ($M-\phi$) de una sección. El artículo presenta el desarrollo de las ecuaciones para generar las gráficas $M-\phi$ de secciones rectangulares, triangulares y trapezoidales con acero en tensión y en compresión. Los puntos de la gráfica, incluyendo los principales: Momento de agrietamiento, Momento de fluencia del acero así como el Momento de falla con sus respectivas curvaturas, son determinados considerando una distribución parabólica para los esfuerzos de compresión y lineal para los esfuerzos de tensión en el concreto, mientras que los esfuerzos de tensión y compresión del acero se consideran bilineales. Se analiza la ductilidad de un elemento en flexión de acuerdo al Reglamento del ACI comparando la máxima y mínima curvatura correspondiendo al área de acero mínima y a máxima respectivamente, así como el efecto de proporcionar acero a compresión a un elemento. Por otro lado se determina la rigidez del elemento antes de la primera grieta, y se analiza la pérdida de rigidez a medida de que el elemento aumenta su curvatura hasta llegar a la fluencia del acero y a la falla.

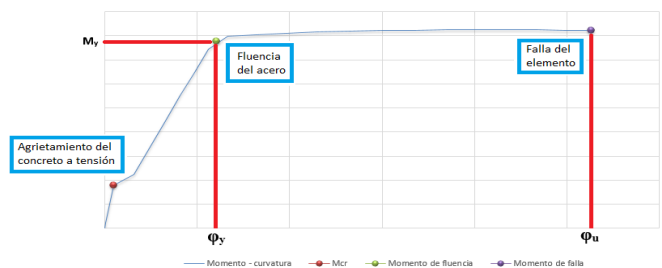
Keywords– Vigas, Concreto reforzado, Momento curvatura, Ductilidad, Rigidez.

INTRODUCCIÓN

La gráfica Momento- Curvatura nos proporciona puntos de momento resistente interno y su curvatura correspondiente para un diagrama de deformaciones que cumpla con la compatibilidad y equilibrio de fuerzas internas. Los puntos más importantes de la gráfica, como se muestran en la fig. 1, son aquellos donde los materiales del elemento fallan o fluyen, como es el caso del momento correspondiente al agrietamiento del concreto a tensión, el momento correspondiente cuando el acero empieza a fluir y el momento cuando falla el elemento por compresión del concreto. El comportamiento de los elementos sujetos a flexión antes de la falla, nos permite determinar la curvatura del elemento en el estado de servicio o la deformación del acero en tensión. Por otro lado, con la gráfica $M-\phi$ se puede analizar la influencia del acero en compresión antes y después del agrietamiento así como después de la fluencia del acero hasta llegar a la falla del elemento.

Los elementos de concreto reforzado son diseñados bajo la teoría de resistencia última usando especificaciones de diferentes códigos, asumiendo en la mayoría de los casos una

distribución rectangular de esfuerzos de compresión del concreto y despreciando su resistencia a la tensión. Sin embargo, para conocer el comportamiento del elemento antes de falla, se asume una distribución parabólica de esfuerzos de compresión y una distribución lineal de los esfuerzos de tensión del concreto.



SECCIONES CONSIDERADAS

Se determinan ecuaciones generales para determinar la fuerza de compresión de concreto y su localización a partir del eje neutro para las siguientes geometrías: Vigas de forma trapezoidal, rectangular y triangular como se muestra en la fig. 2.

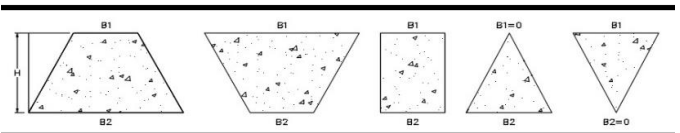


Fig. 2. Secciones aplicables para el uso de las ecuaciones generalizadas.

MATERIALES

Las características mecánicas de los materiales pueden aproximarse mediante ecuaciones propuestas para obtener analíticamente la resistencia de un elemento. En el caso del concreto reforzado, las curvas esfuerzo - deformación del concreto y del acero, tanto a tensión como a compresión son simplificadas. A continuación se presentan las ecuaciones utilizadas para cada uno de los materiales.

A. Concreto

i. Compresión

Los modelos que autores diferentes han propuesto para aproximar la curva esfuerzo – deformación (σ - ϵ) del concreto a compresión para concreto no confinado y confinado se muestran en la fig. 3.

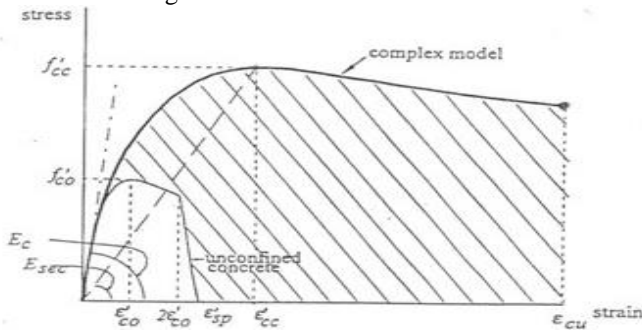


Figura. 3 Modelo para concreto confinado y no confinado, [3].

Los esfuerzos de compresión en el concreto se consideraran no lineales y se utiliza la parábola de segundo grado y su correspondiente gráfica, fig. 4, presentada por [2] para concretos no confinados.

$$f_c = f'_c \left[\frac{2\epsilon_c}{\epsilon'_c} - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Dónde: f'_c representa la resistencia a la compresión del concreto, ϵ_c la deformación unitaria del concreto correspondiente al esfuerzo de compresión y ϵ'_c la deformación cuando alcanza la máxima resistencia e igual a 0.002.

En la fig. 4 se muestra la curva σ - ϵ del concreto a compresión en relación a la máxima resistencia a la compresión del concreto, considerando la máxima deformación del concreto (ϵ_{cu}), igual a 0.003 en correspondencia a la sección 10.2.3 del Reglamento ACI 318S-11.

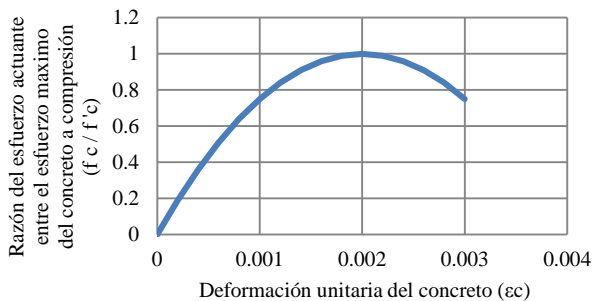


Fig. 4 Curva esfuerzo - deformación del concreto a compresión.

ii. Tensión

La curva σ - ϵ del concreto a tensión, fig. 5, se obtiene graficando una distribución lineal a partir de cero hasta la deformación correspondiente al esfuerzo de ruptura (f_r) del concreto por tensión igual a 13.2×10^{-5} , la cual fue calculada como se muestra a continuación:

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} = E_c \epsilon_{ctmax} = (15,100\sqrt{f'_c}) \epsilon_{ctmax} \therefore$$

$$\epsilon_{ctmax} = \frac{2}{15,100} = 13.2 \times 10^{-5}$$

Dónde: E_c es el módulo de elasticidad del concreto (8.5 ACI 318S-11), ϵ_{ct} es la deformación del concreto a una posición dada.

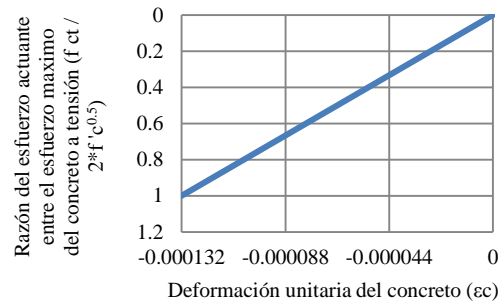


Fig. 5. Curva esfuerzo - deformación a tensión del concreto.

B. Acero

La curva σ - ϵ del acero de refuerzo para tensión y compresión se simplifica a una curva bilineal, fig. 6, con las ecuaciones presentadas en la tabla 1, donde ϵ_y (deformación del acero cuando empieza a fluir) y f_y el esfuerzo correspondiente, ϵ_r (deformación del acero al momento de falla), E_s (módulo de elasticidad del acero) y ϵ_s (la deformación del acero).

TABLA 1. ECUACIONES DE LA CURVA ESFUERZO – DEFORMACIÓN DEL ACERO DE REFUERZO.

Rango	Ecuación
Falla por compresión ($-\epsilon_r$) hasta $-\epsilon_y$	$\sigma = -f_y$
De $-\epsilon_y$ a ϵ_y	$\sigma = E_s \epsilon_s$
De ϵ_y a la falla en tensión (ϵ_r)	$\sigma = f_y$

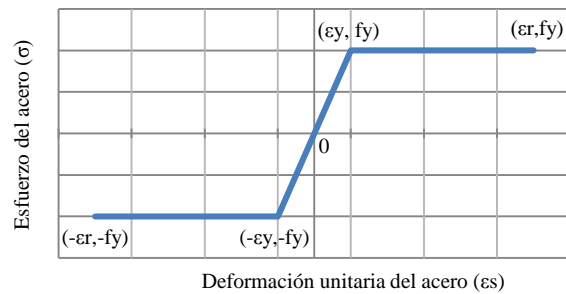


Fig. 6. Aproximación de la curva esfuerzo - deformación del acero.

CÁLCULO DE LA FUERZA DE COMPRESIÓN DEL CONCRETO Y SU LOCALIZACIÓN.

La Fuerza de compresión del concreto (C_c), se obtiene integrando el diferencial de fuerza desde el eje neutro hasta la fibra más alejada en compresión. El diferencial de fuerza se determina multiplicando el diferencial de área por el correspondiente esfuerzo, como puede observarse en la fig. 7. Los esfuerzos de compresión en el concreto en función de la distancia x , se determinan según (2), la cual es resultado de tomar la (1) que está en función de la deformación del concreto y substituir la deformación ϵ_c en función de la posición x y de la máxima deformación $\epsilon_{c,max}$.

Del diagrama de deformaciones, usando una relación de triángulos:

$$\frac{\varepsilon_{c,max}}{c} = \frac{\varepsilon_c}{x} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{x \cdot \varepsilon_{c,max}}{c}$$

$$f_c = f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (2)$$

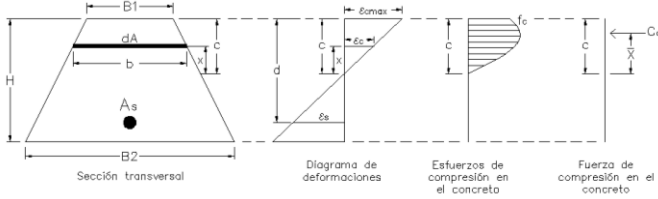


Fig. 7. Fuerza de compresión del concreto

La fuerza a compresión en el concreto, (4), será el resultado de integrar el diferencial de fuerza obtenido como el diferencial de área, (3), por el esfuerzo, (2).

$$dA = b * dx \quad (3)$$

$$C_c = \int_0^c dF = \int_0^c dA * f_c = \int_0^c b * f_c * dx \quad (4)$$

La base, b, que considera las geometrías antes mencionadas, se expresa en función de la posición del eje neutro, c, mediante (5):

$$b = B1 + \frac{(B2-B1)}{H}(c-x) \quad (5)$$

De esta forma, el diferencial de fuerza se expresa como:

$$dF = \left[B1 + \frac{B2-B1}{H}(c-x) \right] f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} \right)^2 \right] dx$$

Integrando (4):

$$C_c = \int_0^c \left[B1 + \frac{B2-B1}{H}(c-x) \right] f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} \right)^2 \right] dx$$

$$C_c = \int_0^c \left\{ \left[B1 + \frac{B2-B1}{H}(c) \right] f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} \right)^2 \right] - \left[\frac{B2-B1}{H} \right] f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x^2}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{x^3}{c^2} \right] \right\} dx$$

$$C_c = \left[\left[\left(B1 + \frac{B2-B1}{H}c \right) f'_c \right] \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x^2}{2c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{x^3}{3c^2} \right] \right]_0^c - \left[\left[\frac{B2-B1}{H} f'_c \right] \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x^3}{3c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{x^4}{4c^2} \right] \right]_0^c$$

$$C_c = \left(B1 + \frac{B2-B1}{H}c \right) f'_c c \left[\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] - \left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c c^2 \left[\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (6)$$

La localización \bar{X} , (7), de la fuerza de compresión del concreto se obtiene igualando la integral del momento que producen los diferenciales de fuerza dF , por la distancia al eje neutro, x , con el momento que produce la fuerza resultante, C_c , por la distancia donde se ubica la fuerza \bar{X} .

$$dM = x dF = x dA f_c \Rightarrow \int_0^c dM = C_c \bar{X}$$

$$\bar{X} = \int_0^c x dA f_c / C_c \quad (7)$$

Integrando el numerador de (7):

$$\int_0^c x dA f_c = x \left[B1 + \frac{B2-B1}{H}(c-x) \right] f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}x}{c\varepsilon'_c} \right)^2 \right] dx$$

$$\int_0^c x dA f_c = \int_0^c \left\{ \left(B1 + \frac{B2-B1}{H}c \right) f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x^2}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{x^3}{c^2} \right] \right\} dx - \int_0^c \left\{ \left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}x^3}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{x^4}{c^2} \right] \right\} dx$$

$$\int_0^c x dA f_c = \left[\left(B1 + \frac{B2-B1}{H}c \right) f'_c \left[\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{c,max}x^3}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{x^4}{c^2} \right] \right]_0^c - \left[\left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c \left[\frac{2}{4} \frac{\varepsilon_{c,max}x^4}{c\varepsilon'_c} - \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \frac{1}{5} \frac{x^5}{c^2} \right] \right]_0^c$$

$$\int_0^c x dA f_c = \left(B1 + \frac{B2-B1}{H}c \right) f'_c c^2 \left[\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] - \left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c c^3 \left[\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{5} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right]$$

$$\int_0^c x dA f_c = B1 f'_c c^2 \left[\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] + \left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c c^3 \left[\frac{1}{6} \frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{20} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (8)$$

Sustituyendo (8) y (6) en (7) se obtiene (9).

$$\bar{X} = \frac{B1 f'_c c^2 \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}}{3\varepsilon'_c} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] + \left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c c^3 \left[\frac{1}{6} \frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{20} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right]}{\left(B1 + \frac{B2-B1}{H}c \right) f'_c c \left[\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] - \left(\frac{B2-B1}{H} \right) f'_c c^2 \left[\frac{2\varepsilon_{c,max}}{3\varepsilon'_c} - \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{c,max}}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right]} \quad (9)$$

CÁLCULO DE LA FUERZA TENSIÓN DEL CONCRETO Y SU LOCALIZACIÓN.

La fuerza de tensión, véase fig. 8, del concreto se determina integrando el diferencial de fuerza de tensión obtenido como el diferencial de área por el esfuerzo de tensión desde el eje neutro hasta donde se encuentra ubicado el esfuerzo de ruptura o esfuerzo máximo de tensión. La deformación del concreto a tensión a una distancia x , se determina del diagrama de deformaciones por medio de una relación de triángulos:

$$\frac{\varepsilon_{ct,max}}{h_1} = \frac{\varepsilon_{ct}}{x_1} \Rightarrow \varepsilon_{ct} = \frac{x_1 \varepsilon_{ct,max}}{h_1} \quad (10)$$

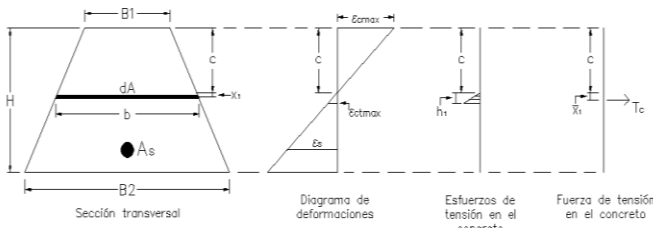


Fig. 8. Fuerza de tensión y su ubicación

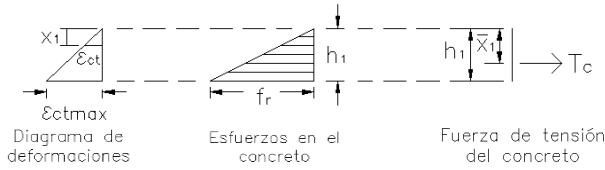


Figura 8.1 Deformación, esfuerzos y fuerza de tensión del concreto.

Considerando la deformación ε_{ct} , de (10) podemos calcular los esfuerzos a tensión:

$$f_t = E_c \varepsilon_{ct} = E_c \frac{x_1 \varepsilon_{ct, max}}{h_1} \quad (11)$$

El diferencial de área en tensión, se calcula substituyendo el valor del ancho b, de la siguiente forma:

$$dA = b dx_1.$$

$$b = B_1 + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) (c + x_1) \quad \therefore$$

$$dA = \left[B_1 + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) (c + x_1) \right] dx_1. \quad (12)$$

El diferencial de fuerza, (13), se calcula como el producto del diferencial del área, (12), por el esfuerzo en tensión, (11):

$$dF = \left[B_1 + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) (c + x_1) \right] E_c \frac{x_1 \varepsilon_{ct, max}}{h_1} dx_1 =$$

$$dF = \frac{f_r}{h_1} \left[B_1 x_1 + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) (c x_1 + x_1^2) \right] dx_1. \quad (13)$$

La fuerza de tensión del concreto (14) se determina integrando el diferencial de la fuerza, (13), desde el eje neutro hasta donde se encuentre la deformación máxima en tensión (ε_{ctmax}), denominada h_1 , la cual está en función de la máxima deformación del concreto a compresión ε_{cmax} y de la profundidad del eje neutro.

$$T_c = \int_0^{h_1} \frac{f_r}{h_1} \left[B_1 x_1 + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) (c x_1 + x_1^2) \right] dx$$

$$T_c = \frac{f_r}{h_1} \left[B_1 \frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} \right) \right]_0^{h_1}$$

$$T_c = \frac{f_r}{h_1} \left[B_1 \frac{h_1^2}{2} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c h_1^2}{2} + \frac{h_1^3}{3} \right) \right]$$

$$T_c = f_r \left[B_1 \frac{h_1}{2} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c h_1}{2} + \frac{h_1^2}{3} \right) \right] \quad (14)$$

La localización de la fuerza de tensión, (15), a partir del eje neutro, se determina integrando desde cero hasta h_1 , el

diferencial de momento que produce el diferencial de fuerza por la distancia al eje neutro e igualando el resultado al momento que produce la fuerza de tensión por la distancia \bar{X}_1 , como se muestra a continuación:

$$x_1 dF = dM \Rightarrow \int_0^{h_1} dM = T_c \bar{X}_1$$

$$\int_0^{h_1} x_1 \left(\frac{f_r}{h_1} \left[B_1 x_1 + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) (c x_1 + x_1^2) \right] \right) dx = T_c \bar{X}_1$$

$$\frac{f_r}{h_1} \left[B_1 \frac{x_1^3}{3} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c x_1^3}{3} + \frac{x_1^4}{4} \right) \right]_0^{h_1} = T_c \bar{X}_1$$

$$\frac{f_r}{h_1} \left[B_1 \frac{h_1^3}{3} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c h_1^3}{3} + \frac{h_1^4}{4} \right) \right] = T_c \bar{X}_1$$

La ecuación final de la posición de la fuerza de tensión del concreto respecto de su eje neutro es:

$$\bar{X}_1 = \frac{B_1 \frac{h_1^2}{3} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c h_1^2}{3} + \frac{h_1^3}{4} \right)}{B_1 \frac{h_1}{2} + \left(\frac{B_2 - B_1}{H} \right) \left(\frac{c h_1}{2} + \frac{h_1^2}{3} \right)} \quad (15)$$

FUERZA DE COMPRESIÓN Y TENSIÓN EN EL ACERO

La fuerza de tensión y compresión proporcionada por el acero de refuerzo, (16), se obtiene considerando el área de acero multiplicada por el esfuerzo correspondiente:

$$F_s = A_s \varepsilon_s E_s \leq A_s f_y \quad (16)$$

La localización de la fuerza será ubicada en el centroide de las varillas.

DETERMINACIÓN DE LA GRÁFICA MOMENTO CURVATURA

Teniendo las ecuaciones correspondientes para determinar la fuerza de compresión y tensión de los materiales, tanto del concreto como del acero, así como su localización, se procede a buscar la posición del eje neutro que cumpla con el equilibrio interno, es decir que la suma de fuerzas internas sea cero. Para lograr éste objetivo, se programó una hoja de cálculo electrónica en el software comercial Excel usando un macro programado con el comando "Goal seek" para encontrar el valor del eje neutro que cumpla con la condición de que las fuerzas de compresión y tensión sean iguales. Posteriormente se determina el momento que producen las fuerzas internas y su curvatura correspondiente para un diagrama de deformaciones. El momento resistente se determina utilizando la (17):

$$M = C_c (d - c + \bar{X}) + C_s (d - d') - T_c (d - c - \bar{X}_1). \quad (17)$$

La curvatura, ϕ , se calcula como la relación entre la deformación máxima a compresión y la posición del eje neutro. El proceso se repite para determinar varios puntos de la curva M- ϕ , véase fig. 9.

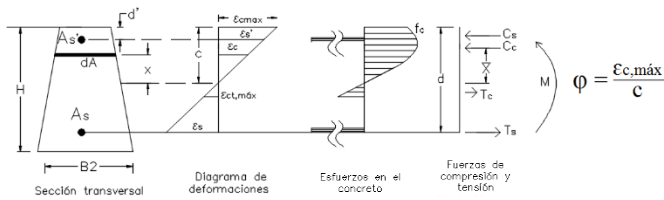


Fig. 9. Esquema para determinar el momento y la curvatura de una viga

Con la hoja electrónica de cálculo mostrada en la tabla 3, se podrán determinar las gráficas Momento –Curvatura para diferentes tipos de secciones con acero en tensión y compresión, y realizar análisis de sensibilidad cuando se le proporciona el área de acero mínima ó máxima a la sección.

EJEMPLO 1:

Ejemplo 1. Determinación de la gráfica Momento Curvatura para una viga rectangular doblemente reforzada. La información sobre las dimensiones de la viga, cantidad de acero, ubicación y materiales será proporcionada inicialmente, desplegando la información obtenida, como se muestra en la tabla 2.

TABLA 2.

DATOS CAPTURADOS EN LA HOJA DE EXCEL, EJEMPLO1.

Datos	Nomenclatura	Valor	Unidad
Base superior	B1	30.00	cm
Base inferior	B2	30.00	cm
Altura	H	50.00	cm
Resistencia a la compresión del concreto	f'c	250.00	kg/cm
	e'c	0.002	
Esfuerzo de fluencia del acero	Fy	4200	kg/cm2
Módulo de elasticidad del acero	Es	2040000	kg/cm2
Área de acero en tensión	As	11.40	cm2
Peralte efectivo	d	44	cm
Área de acero en compresión	A's	2.53	cm2
Peralte de acero a compresión	d'	6	cm

Al utilizar el Macro programado ajusta el equilibrio interno de fuerzas y determina el momento resistente interno y la curvatura correspondiente, como se observa en la Tabla 3.

TABLA 3. RESULTADOS FINALES DEL EJEMPLO 1.

εc,máx	c	Cc	Tc	h	Tc	Tt	εs	fs	Fs	ε's	f's	F's	Cc - Tc - F's = 0	M (ton-m)	Curvatura
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00001	46.2325879	1730.83251	30.8152933	3.76741212	1787.04048	2.51160808	-4.829E-07	-0.9851232	-11.23131	8.7022E-06	17.7525168	44.9766581	0	0.59659059	2.163E-07
0.00014037	25.7685769	13247.2528	17.1276085	24.2314231	11493.9732	16.1542821	9.9315E-05	202.602942	2309.85993	0.00010769	219.685091	556.580307	0	4.65685479	5.4475E-06
0.0003	14.8502903	15871.2477	9.83506067	6.53412773	3099.40892	4.35609515	0.00058887	1201.29789	13695.9011	0.00017879	364.732106	324.062286	0	5.77005735	2.0202E-05
0.00045	14.3148508	22344.5874	9.44651189	4.19302289	1991.77144	2.7933486	0.00093318	1903.68502	21703.7606	0.00026138	533.22477	1350.94468	0	8.72166349	3.1436E-05
0.0006	14.2438495	28843.7952	9.36401216	3.13364689	1486.41923	2.08909793	0.00125343	2557.00036	29152.1565	0.00034726	708.409042	1794.78052	0	11.5545078	4.2123E-05
0.00075	14.296981	35183.9767	9.3611851	2.51626866	1193.57102	1.67751244	0.00155818	3178.6864	36239.9494	0.00043525	887.9064	2249.54372	0	14.2646393	5.2459E-05
0.0009	14.4007408	41312.1252	9.38871827	2.11210865	1001.8611	1.40807243	0.00184986	3773.71141	43023.7819	0.00052502	1071.03935	2713.51783	0	16.8554623	6.2497E-05
0.00105	14.0415959	45613.2467	9.11285391	1.7652292	837.321729	1.17681947	0.00224022	4200	47883.864	0.00060133	1226.71942	3107.93905	0	18.7616917	7.4778E-05
0.0012	12.5821769	45295.6368	8.12598925	1.38403946	656.507559	0.92269297	0.00299641	4200	47883.864	0.00062776	1280.63444	3244.53473	0	18.9444211	9.5373E-05
0.0015	10.8530044	44942.3624	6.80608616	0.93746439	444.678405	0.62497626	0.00469544	4200	47883.864	0.00065517	1336.54254	3386.17997	0	19.1869842	0.00014081
0.00165	9.99854994	44852.8701	6.34965384	0.799884	379.418293	0.533256	0.00561105	4200	47883.864	0.00065986	1346.1071	3410.41215	0	19.2676004	0.00016502
0.0018	9.48104433	44797.9345	5.9820875	0.69527658	329.798642	0.46351772	0.00655351	4200	47883.864	0.00066088	1348.20536	3415.72816	0	19.3292931	0.00018995
0.00195	9.06908081	44764.4161	5.682171	0.61390701	291.201663	0.40927134	0.00751072	4200	47883.864	0.0006599	1346.20076	3410.64943	0	19.3757318	0.00021502
0.0021	8.7406631	44741.2692	5.43489949	0.54941311	260.60952	0.36627541	0.00847128	4200	47883.864	0.00065846	1343.26201	3403.20401	0	19.4094008	0.00024026
0.00225	8.48002904	44718.9031	5.22935124	0.49749504	235.982616	0.33166336	0.00942449	4200	47883.864	0.00065802	1342.36961	3400.94308	0	19.43197	0.00026533
0.0024	8.27570128	44688.7869	5.05737301	0.45516357	215.903039	0.30344238	0.01036025	4200	47883.864	0.00065997	1346.33104	3410.9795	0	19.4445319	0.00029001
0.0027	8.0044803	44574.9496	4.79056018	0.39133015	185.624188	0.26088677	0.01214169	4200	47883.864	0.00067613	1379.31222	3494.53854	0	19.4419671	0.00033731
0.00285	7.92690785	44477.3845	4.68694155	0.367141	174.150265	0.24476066	0.01296954	4200	47883.864	0.00069279	1413.29286	3580.62975	0	19.4272411	0.00035953
0.003	7.88339446	44344.0939	4.59864677	0.34686936	164.534583	0.23124624	0.01374406	4200	47883.864	0.00071672	1462.108	3704.30472	0	19.4034017	0.00038055

La curva M-φ de la Fig.10, generada con la información obtenida de la tabla 3, incluye los puntos correspondientes a: el momento de agrietamiento (Mcr), el punto en el que el acero de refuerzo a tensión empieza a fluir My y el momento de falla Mn. Los puntos generan líneas de tendencia, cuyos quiebres de pendiente marcan la pérdida de rigidez del elemento, causado por la reducción de la inercia de la sección. En la fig. 10 se presenta una comparativa entre la curva generada a partir de 20 puntos contra una curva M-φ hecha con los tres puntos destacables en el comportamiento de una viga.

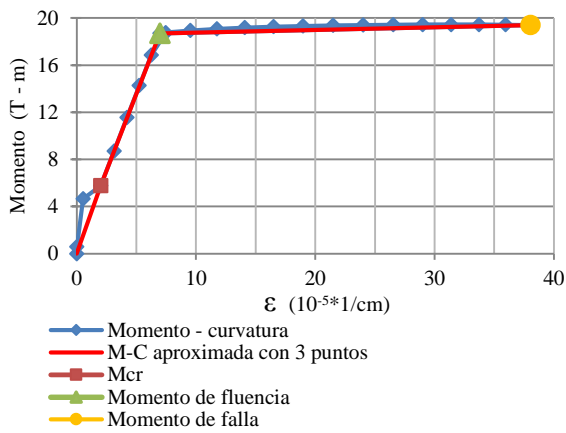


Figura. 10. Momento – curvatura para la viga rectangular doble-reforzada

DUCTILIDAD DEL ELEMENTO A FLEXIÓN.

La ductilidad de un elemento sujeto a flexión está asociada a la curvatura del elemento en falla, a medida de que la cantidad de acero disminuye, la profundidad del eje neutro también disminuye aumentando de ésta manera la curvatura. Los reglamentos limitan el área de acero entre un mínimo y un máximo o una deformación mínima y una deformación máxima. El reglamento del ACI establece un área de acero mínima (Art 10.5) correspondiente a la máxima deformación unitaria del acero y una mínima deformación (0.004) correspondiente a la máxima área de refuerzo para cumplir con ductilidad. Este rango dúctil es posible graficarlo dentro de la curva M-φ para elementos a flexión.

El eje neutro correspondiente a la mayor cantidad de acero en una viga, estará en función del peralte efectivo, d, del elemento, como se indica en la siguiente relación:

$$\frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{\epsilon_{cu} + \epsilon_s}{d} \Rightarrow \frac{0.003}{c} = \frac{0.003 + 0.004}{d} \Rightarrow c = \frac{3}{7}d.$$

Por lo tanto la curvatura mínima sería igual a $\frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{7\epsilon_{cu}}{3d}$

Según la sección 10.5 del ACI 318S-11 el área de acero mínima, $A_{s, \min}$, para vigas rectangulares se calcula por medio de (18):

$$A_{s, \min} = \frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y}bd \geq \frac{14}{f_y}bd. \quad (18)$$

Sin embargo, (18) no satisface los casos en los que los elementos no sean rectangulares por lo que necesitaremos obtener la deformación unitaria del acero ligada a (18), para lo que se calcula la posición del eje neutro mediante equilibrio de fuerzas internas. Considerando que para una viga rectangular en falla, la fuerza de compresión del concreto es $C = 0.75f'_c c b$ (considerando la distribución parabólica de esfuerzos).

$$C = T \therefore 0.75f'_c c b = A_{s, \min}f_y.$$

De donde se despeja para $A_{s, \min}$:

$$A_{s, \min} = \frac{0.75f'_c c b}{f_y}. \quad (19)$$

Y al sustituir (19) en (18) se obtiene la función del eje neutro:

$$c = \frac{14d}{0.75f'_c} \leq \frac{0.8d\sqrt{f'_c}}{0.75f'_c}. \quad (20)$$

La curvatura máxima sería igual a: $\frac{\epsilon_{cu}}{c} = \frac{0.75f'_c \epsilon_{cu}}{14d}$

Por otro lado la deformación máxima del acero en tensión puede ser obtenida substituyendo el valor de la profundidad del eje neutro de la expresión 20, en el diagrama de deformaciones en falla.

$$\epsilon_s = \epsilon_{cu} \left(\frac{d}{c} - 1 \right) = \epsilon_{cu} \left(\frac{0.75f'_c d}{14d \text{ ó } 0.8\sqrt{f'_c}d} - 1 \right) \quad (21)$$

Para $f'_c < 306 \frac{Kg}{cm^2}$ se usa el 14 en la ecuación 21 y para $f'_c > 306 \frac{Kg}{cm^2}$ se usa el $0.8\sqrt{f'_c}$. En la tabla 4 se presentan los valores máximos de deformación unitaria del acero en función de f'_c correspondientes a una viga rectangular con área de acero mínima.

TABLA 4.
Esmáx en función de f'c.

f'c	100	150	200	250	280	300	350
Esmáx	0.0125	0.0202	0.0280	0.0357	0.0404	0.0427	0.0477

Nota: Con la máxima deformación obtenida en el acero, será posible calcular el mínimo refuerzo en un elemento de cualquier sección y no solo para los casos de vigas rectangulares.

EJEMPLO 2:

Ejemplo 2. Determinación de la curvatura máxima y mínima para la viga de sección trapezoidal, fig. 11, utilizando las ecuaciones determinadas en este artículo. Los datos de la sección se muestran en la tabla 5.

TABLA 5.
DATOS EJEMPLO 2.

Datos	Nomenclatura	Valor	Unidad
Base superior	B1	50	Cm
Base inferior	B2	90	Cm
Altura	H	60	Cm
Resistencia a la compresión del concreto	f'c	250	kg/cm ²
	ε'c	0.002	
Esfuerzo de fluencia del acero	fy	4,200.00	kg/cm ²
Módulo de elasticidad del acero	Es	2,000,000	kg/cm ²
Peralte efectivo	d	53.78	Cm
Area de acero mínima	As, mín	8.75	cm ²
Area de acero máxima	As, máx	43.08	cm ²

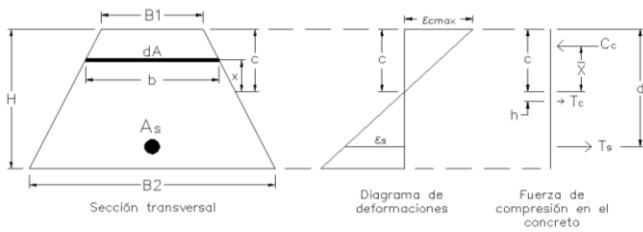


Fig. 11. Ejemplo 2

La hoja de Excel antes mencionada fue usada para la realización del ejemplo 2, realizando dos curvas M-φ utilizando dos áreas de acero diferentes, las correspondientes a la mínima y la máxima, y graficada a partir de 20 puntos. Con los resultados obtenidos se graficó la fig. 12:

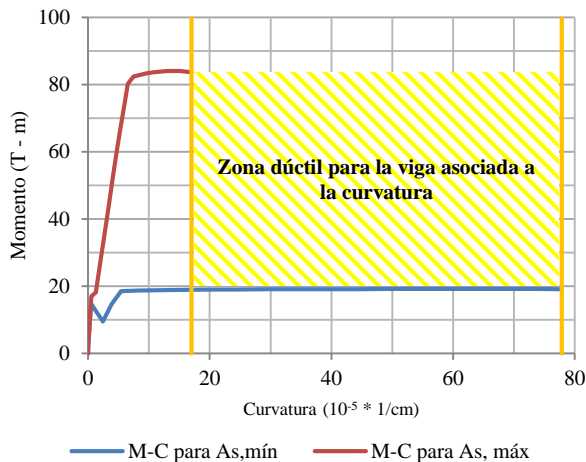


Figura. 12. Momento vs Curvatura asociada al área de acero mínima y máxima

El rango sombreado de la fig. 12, es el resultado de delimitar las curvaturas máximas para los casos de $A_{s, \text{mín.}}$ y $A_{s, \text{máx.}}$. En el caso del ejemplo los rangos se encuentran ubicados en:

$$\varphi_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon_{c, \text{máx}}}{c} = 16.99 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

$$\varphi_{\text{mín}} = \frac{\varepsilon_{c, \text{máx}}}{c} = 77.87 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

Para el caso de la curva M-φ obtenida usando el $A_{s, \text{mín}}$ se observa que los momentos que se obtienen conforme crece la curvatura, se mantienen ligeramente cercanos al momento asociado al momento de agrietamiento (M_{cr}).

FACTORES DE SEGURIDAD Y CURVATURA EN SERVICIO

El factor de seguridad de un elemento sujeto a flexión depende de la relación de carga muerta y carga viva ya que los factores para cada una de las cargas varían. Las combinaciones de carga para el diseño de elementos a flexión recomendadas por el ACI 318S-11 considerando solo los efectos de cargas gravitacionales (carga muerta y viva) sobre el elemento son:

- $U = 1.4 D$
- $U = 1.2 D + 1.6 L$

De estas combinaciones, para los rangos típicos de carga, la segunda es la más crítica con la máxima carga de diseño. Los

rangos de la carga viva en relación a la carga muerta en estructuras con fines habitacionales o de oficina, se encuentran en un orden de: $0.5 \leq \frac{W_L}{W_m} \leq 1.5$

El factor de seguridad, FS, está dado por la relación entre la carga última vs la carga de servicio:

$$\text{Cuando } W_L = 0.5 W_m$$

$$W_u = 1.2W_m + 1.6(0.5 W_m) = (1.2 + 0.8) W_m = 2 W_m$$

$$W_s = W_m + 0.5 W_m = 1.5W_m$$

$$F.S. = \frac{W_u}{W_s} = \frac{2W_m}{1.5W_m} = 1.33$$

$$\text{Cuando } W_L = 1.5 W_m$$

$$W_u = 1.2W_m + 1.6(1.5 W_m) = (1.2 + 2.4) W_m = 3.6 W_m$$

$$W_s = W_m + 1.5 W_m = 2.5 W_m$$

$$F.S. = \frac{W_u}{W_s} = \frac{3.6 W_m}{2.5 W_m} = 1.44$$

Por otro lado, en la teoría de resistencia última se reduce el momento resistente de diseño por un factor de reducción que varía entre 0.8166 a 0.9 dependiendo de la deformación del acero en tensión entre 0.004 a mayor o igual a 0.005 respectivamente.

El rango obtenido de 1.33 y 1.44, debe de considerar los factores de reducción de diseño. Entonces finalmente se tiene un rango de F. S. que ronda aproximadamente entre 1.47 y 1.76. Dichos factores se pueden reescribir como porcentaje del momento máximo si se calcula su inverso, quedando 0.68 y 0.57 respectivamente como se muestra en la fig. 13.

A continuación se presenta la gráfica de la fig. 13 correspondiente a una viga rectangular de 30 x 60 con un armado de 4 varillas #6 y concreto de f'_c de 250 kg/cm².

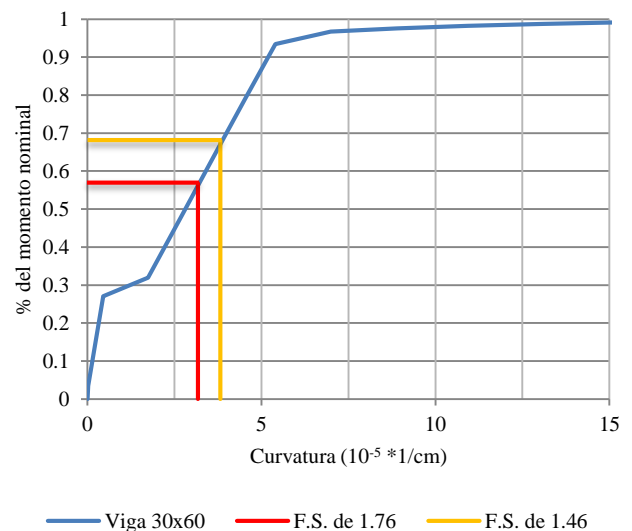


Figura. 13. Rango de factores de seguridad en viga rectangular.

La curvatura asociada al rango que delimitan los factores de seguridad es de 3.2 a 3.8 [$\times 10^{-5}$ 1/cm].

La deformación promedio del acero, ϵ_s asociada al rango entre los factores de seguridad es de 0.00136, lo que quiere decir que se encuentra a un 64% en relación a 0.0021 que es la deformación a la que el acero empieza a fluir, ϵ_y .

Conocer el estado de servicio de un elemento a flexión puede ser posible en caso de plantear un rango de factores de seguridad. Dicho rango encierra un momento de servicio y una curvatura asociada del 57-68 (%) del momento máximo resistente. La deformación unitaria del acero, podrá calcularse a partir de la curvatura asociada al rango mencionado y la razón de que tan alejado este la deformación respecto a la deformación ϵ_y dependerá en gran parte a la rigidez de la sección.

EFFECTO DEL ACERO EN COMPRESIÓN EN ELEMENTOS A FLEXIÓN.

Generando las gráficas de Momento Curvatura, se puede visualizar las principales ventajas de utilizar acero en compresión: Reducir la curvatura en la etapa de servicio, aumentar la resistencia nominal e incrementar la ductilidad del elemento en falla.

El acero en compresión en un elemento a flexión es proporcionado comúnmente como una alternativa para cumplir con el requisito de ductilidad. En el diseño de elementos de concreto reforzado se determina el área de acero en tensión que cumpla con los requerimientos de resistencia, sin embargo cuando el área de acero proporcionada, redondeada a varillas comerciales, es mayor a la máxima área de acero permitida por el reglamento o la deformación del acero en tensión es menor a 0.004, es necesario aumentar el tamaño de la sección, aumentar la resistencia del material o proporcionar área de acero en compresión. El comportamiento de un elemento doblemente reforzado puede ser analizado a través de la gráfica Momento-Curvatura y comparado con el comportamiento de un elemento con refuerzo en tensión únicamente.

La fig. 14 muestra tres gráficas de una viga rectangular: con refuerzo en tensión equivalente al área de acero máxima permitida A_{smax} , con refuerzo en tensión mayor al área de acero máxima $A_s > A_{smax}$ y proporcionando al segundo caso la mínima cantidad de acero en compresión para que cumpla con ductilidad.

TABLA 6. DATOS UTILIZADOS PARA LA VIGA RECTANGULAR.

Datos Generales	Nomenclatura	Valor	Unidad
Base superior	B1	40.00	cm
Base inferior	B2	40.00	cm
Altura	H	60.00	cm
Resistencia a la compresión del concreto	f'_c	250.00	kg/cm
	ϵ'_c	0.002	
Esfuerzo de fluencia del acero	F_y	4,200	kg/cm ²
Módulo de elasticidad del acero	E_s	2,000,000	kg/cm ²

Peralte efectivo	d	54.00	cm
Acero de refuerzo máximo			
Área de acero máximo en tensión	$A_{s \text{ máx.}}$	41.17	cm ²
Acero de refuerzo para viga que no cumple ductilidad			
Área de acero en tensión	A_s	50.7	cm ²
Acero de refuerzo para viga doblemente reforzada			
Área de acero en tensión	A_s	50.7	cm ²
Área de acero en compresión	A'_s	10.14	cm ²
Localización del acero en compresión	d'	6.00	cm

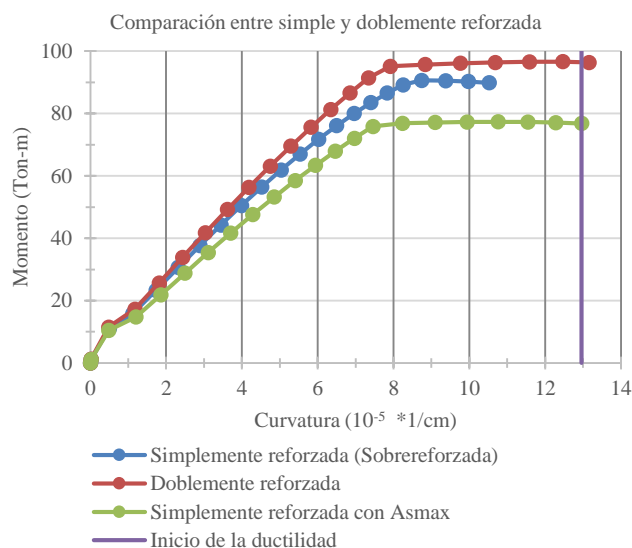


Figura. 14. Efecto del refuerzo en compresión en una viga de CR.

La curva M- ϕ , al ser calculada con el área de acero máximo permitido, marca el límite de resistencia y ductilidad para el elemento con refuerzo en tensión únicamente. Aumentar el área de acero en tensión aproximadamente en un 20%, aumenta la resistencia del elemento, pero reduce la curvatura y por lo tanto no cumple con los requisitos de ductilidad en falla. Para la viga estudiada, con 50.7 cm² a tensión, proporcionar 10.14 cm² en compresión (equivalente aproximadamente al 20% del área de acero en tensión), permitirá que la viga se comporte dentro de los límites de ductilidad permitidos por el reglamento del ACI.

ANÁLISIS SOBRE LA PÉRDIDA DE RIGIDEZ EN DIFERENTES ESTADOS DEL ELEMENTO

La rigidez a flexión es la característica que tiene un elemento, producto del módulo de elasticidad y de la inercia de la sección, a medida de que la sección se sigue deformando, las grietas crecen, disminuyendo así la inercia de la sección. En términos gráficos, en la curva M- ϕ nos podemos referir a la rigidez como la pendiente de la línea generada al unir los puntos de la gráfica.

Utilizando la comparativa mostrada en el ejemplo anterior, fig. 14, se realiza un análisis a las 3 diferentes pendientes que contienen las tres vigas, como se muestran en las figuras 15, 16 y 17.

- 1er pendiente: inicio – punto de agrietamiento del concreto

La rigidez obtenida en esta sección puede aproximarse a la misma para las 3 rectas, promedio igual a 22.63 kg-m². donde el valor máximo y el mínimo difieren en menos del 6 por ciento. Lo anterior debido a que antes del agrietamiento, el concreto a tensión es el que toma la mayor participación sobre el efecto del acero de refuerzo, y dado que las 3 vigas tienen el mismo valor de f'c, las pendientes resultan cercanas aun y cuando la diferencia en el acero de refuerzo es mayor al 25 por ciento.

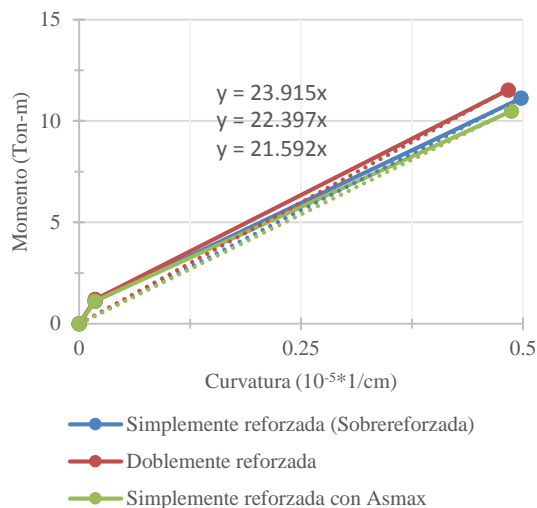


Figura. 15. 1er pendiente: inicio – punto de agrietamiento del concreto.

- 2da pendiente: agrietamiento del concreto – fluencia del acero

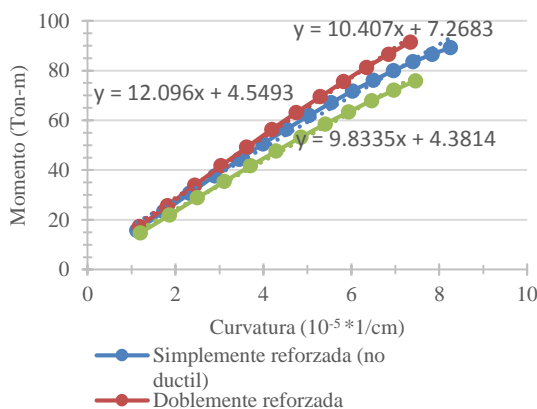


Figura. 16. 2da pendiente: agrietamiento del concreto – fluencia del acero.

En la tabla 7 se listan las rigideces correspondientes a la segunda pendiente para cada uno de los casos.

2DA PENDIENTE: AGRIETAMIENTO DEL CONCRETO – FLUENCIA DEL ACERO

VIGA	Rigidez EI [kg-m ²]
Reforzada con Asmáx	9.83
No dúctil	10.4
Doblemente reforzada	12.09

La rigidez obtenida en esta sección puede observarse que aumenta en un 20 por ciento (de la viga doble reforzada a la viga con acero máximo en tensión).

- 3er pendiente: Fluencia del acero – falla del elemento

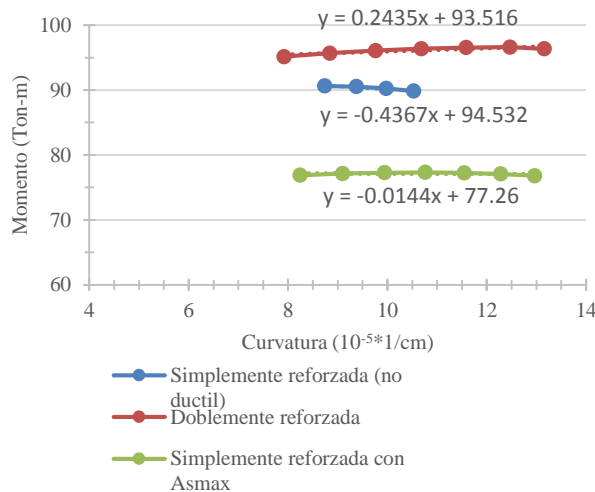


Figura. 17. 3er pendiente: Fluencia del acero – falla del elemento.

Las rigideces correspondientes a la tercera pendiente para cada uno de los casos se listan en la tabla 8.

3ER PENDIENTE: FLUENCIA DEL ACERO – FALLA DEL ELEMENTO.

VIGA	Rigidez EI [kg-m ²]
Reforzada con As,máx	-0.01
No dúctil	-0.43
Doblemente reforzada	0.24

En este tramo, la rigidez tiende a cero, tal y como se observa en la fig. 17, indicando que no hay incremento significativo en resistencia una vez que fluye el acero de refuerzo en tensión.

CONCLUSIONES

- Tanto generar como utilizar las hojas electrónicas de cálculo para realizar el análisis de un elemento a flexión, facilita visualizar su comportamiento y representa una alternativa didáctica para entender los conceptos agrietamiento en el concreto, fluencia del acero, ductilidad y falla del elemento.

- El momento máximo resistente de una viga con área de acero mínima es ligeramente mayor al momento de

agrietamiento, como se observa en la fig. 12. El área de acero mínima le proporciona ductilidad al elemento en falla equivalente a la curvatura máxima en dicha gráfica.

- El momento actuante de servicio en un elemento a flexión se encuentra a un 65% de su máxima capacidad resistente y la curvatura en servicio se encuentra a un 60% de la curvatura asociada a la de fluencia y menor al 10% de la curvatura referenciada a falla, como puede observarse en las figura 13, para los casos donde: la carga viva $0.5W_m \leq W_L \leq 1.5W_m$, los factores de seguridad para cargas gravitacionales sean ($1.2 W_m + 1.6 W_L$) y un factor de reducción de resistencia entre ($0.8166 \leq \phi \leq 0.9$).

- Proporcionar acero en compresión a un elemento, aumenta la resistencia nominal, aumenta la ductilidad en falla y proporciona mayor rigidez al elemento entre el momento de agrietamiento y el momento donde inicia la fluencia del acero, por lo que la curvatura o deformación correspondiente al momento de servicio se ve reducida, como se nota en la figura 14.

- La pendiente de la curva $M - \phi$ representa la rigidez del elemento. La rigidez antes del agrietamiento se ve afectada principalmente por la resistencia a la compresión del concreto (f'_c) y por la sección transversal. Después de este punto, la rigidez del elemento se ve afectada por la cantidad de acero en tensión y aumentada dicha rigidez si se le proporciona acero en

compresión, por último, la rigidez tiende a cero una vez que el acero en tensión fluye.

- La contribución de la fuerza a tensión del concreto para el cálculo del momento de agrietamiento deberá ser siempre considerada.

- La contribución de la fuerza a tensión del concreto para el cálculo del momento M_y es menor de 0.5%

- La contribución de la fuerza a tensión del concreto para el cálculo del momento a falla para el caso estudiado es del orden de 0.0164 %, por lo que se explica lo establecido por el reglamento ACI 318S-2011, “La resistencia a tracción del concreto no debe considerarse en los cálculos de elementos de concreto reforzado sometidos a flexión y a carga axial, excepto cuando se cumplan los requisitos de 18.4 referente a concreto presforzado”.

REFERENCIAS

- [1] American Concrete Institute Committee 318, “Building code requirements for structural concrete (ACI 318-11)”, 2011.
- [2] Kent, D.C., and Park, R., “Flexural members with confined concrete,” *Journal of the Structural Division, Proc. Of the American Society of Civil Engineers*, 97(ST7), pp. 1969-1990, 1971.
- [3] Mander, J.B., Priestley, M.J.N., y Park, R., “Theoretical stress-strain model of confined concrete.” *J. Struct. Eng.*, 114(8), pp. 1804-1826, 1988.