Fourth LACCEI International Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology (LACCEI'2006)
"Breaking Frontiers and Barriers in Engineering: Education, Research and Practice"
21-23 June 2006, Mayagüez, Puerto Rico.

Ecuaciones Diferenciales con Audio

Manuel González Hernández , Phd
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Centro de Investigación Avanzada en Ingeniería Industrial, Carretera Pachuca Tulancingo Km. 4.5 Tel. (771) 72000 Ext. 6733, ghdez@uaeh.edu.mx

Juan Carlos Seck Tuoh Mora, Phd
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Centro de Investigación Avanzada en Ingeniería Industrial, Carretera Pachuca Tulancingo Km. 4.5 Tel. (771) 72000 Ext. 6733, jseck@uaeh.edu.mx

Amaury Caballero, Phd
Universidad Internacional de la Florida, Department of Management Construction, caballer@fiu.edu

Maximino Peña Guerrero, Phd
Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional de Zacatenco. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Departamento de Acústica, mpenag@ipn.mx

Resumen
El propósito de este artículo es mostrar una aplicación que consiste en asignar sonidos a las soluciones de las ecuaciones diferenciales resultado de la modelación matemática de los fenómenos físicos de ingeniería en dispositivos electromecánicos entre otros, estos resultados son derivados del proyecto sobre mantenimiento preventivo basado en audio. La idea principal es acompañar la solución de las ecuaciones de movimiento de algún fenómeno físico de ingeniería con el sonido característico correspondiente a sus frecuencias. Una de las aplicaciones de esta investigación puede ser atractiva para aquellos dedicados a las áreas de la educación, por ejemplo didáctica de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y de la modelación matemática. Se presenta un ejemplo, solución de una ecuación diferencial. Para el cálculo de las frecuencias se utilizó la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Palabras clave
Ecuaciones Diferenciales, Transformada Rápida de Fourier, Multimedia.

1. Introducción

El propósito de este artículo es mostrar una aplicación que consiste en asignar audio a las soluciones de las ecuaciones diferenciales resultado de la modelación matemática de los fenómenos físicos de ingeniería en dispositivos electromecánicos entre otros, derivado del proyecto sobre mantenimiento preventivo basado en audio.

El mantenimiento en general se puede dar en dos categorías, una de ellas es el mantenimiento preventivo programado de acuerdo a un calendario que consiste de pruebas y chequeos de partes para detectar fallas potenciales, calendarios de servicio, y planeación de reparación, reemplazo de lo desgastado o propenso a falla. La otra es mantenimiento calendarizado que consiste en restaurar el servicio en el evento de falla. El mantenimiento requiere no sólo de tiempo sino de mano de obra, economizar partes, gastos de abastecimiento y otros costos.

Multimedia [Philip Shaddock 1992] [Kris Jamsa 1993] es una tecnología que ha revolucionado algunas aplicaciones de ingeniería y en el caso de mantenimiento preventivo es posible contar con un modelo de mantenimiento preventivo basado principalmente en el ruido de los componentes electromecánicos. La idea principal es contar con una base de ruidos de dispositivos, haciendo un reconocimiento de patrones de los ruidos capturados con un micrófono, para monitorear fallas de componentes a tiempo real. De este trabajo resultó otra línea de investigación, que refiere a las ecuaciones diferenciales con audio, el primer intento fue asociar música a las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y al final del documento se muestra un ejemplo.

2. Objetivo

El objetivo del documento es mostrar una alternativa didáctica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, asociándoles el ruido característico del fenómeno físico de ingeniería, que se quiere modelar.

Debido a que la tecnología multimedia permite capturar sonidos, entonces se puede construir una base de ruidos relativos a uno de los componentes de un sistema electromecánico, por el hecho de que se tiene que capturar los ruidos o sonidos del dispositivo en cuestión hasta que se presenta la falla, se optó por un experimento más simple, que consistió en obtener el nivel de agua de un recipiente graduado y un micrófono unidireccional, con un algoritmo para seleccionar un elemento de la base de ruidos previamente construida, como se muestra en la figura 1.

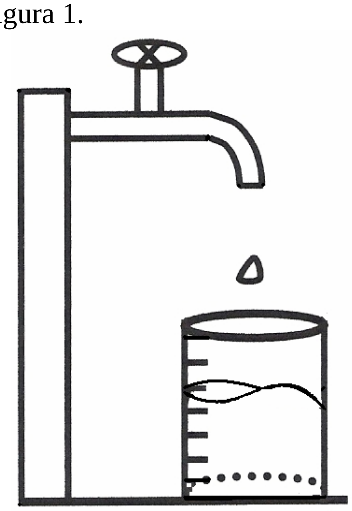

Figura 1: Experimento, el recipiente contiene agua y el sonido de una gota identifica el nivel.

La metodología que se siguió fue grabar los sonidos de las gotas, en cada nivel iniciando desde cero, de esta manera, se construyó una base de datos. Posteriormente se puso una cantidad de agua en el recipiente y se dejó caer una gota y el micrófono capturó el sonido de la gota, después de esto, se comparó con los sonidos de la base de datos de las gotas y aplicando el algoritmo se encontró aproximadamente el nivel de agua del recipiente. Sí este experimento funcionaba entonces, se podría inferir, que con un dispositivo electromecánico sucedería lo mismo, excepto por la consideración de algún filtro debido que en el caso electromecánico se presenta el ruido de otros componentes del sistema. Se debe mencionar que el problema no es trivial, sin embargo es posible debido a que los algoritmos son sencillos, así que el mantenimiento preventivo basado en audio se puede efectuar. El algoritmo referido es el siguiente:

3. Algoritmo

1. Se graban los sonidos en un archivo, con exposiciones en tiempos cortos (cinco segundos) y se transforman al dominio de las frecuencias, con lo cual se forma la base de datos de ruidos.
2. Se coloca un micrófono en el dispositivo electromecánico que se va a analizar, se graba su ruido a tiempo real (cinco segundos) y se transforma al dominio de frecuencias.
3. Le exposición en el dominio de las frecuencias del paso dos se divide en un número de partes iguales y se escoge la frecuencia más representativa de cada subintervalo, éstas se comparan con cada uno de los archivos o registros de la base de datos del paso uno, con un error o tolerancia.
4. Si se encuentra una frecuencia igual con el error mencionado en la base de datos de ruidos, se separa y se comparan las siguientes frecuencias de los otros subintervalos del paso tres y el proceso se repite.
5. Una vez coleccionadas las frecuencias del paso cuatro, se escoge la más representativa y con ella identifica la posible falla del componente.

Ahora, cuando se tiene un modelo matemático de un fenómeno físico de ingeniería, se le puede asociar el ruido característico de la componente en cuestión, este ruido se deberá asociar a la solución del modelo que en el caso de una ecuación diferencial resulta interesante y digamos que natural. Básicamente lo que se hizo fue intercambiar las frecuencias de la solución de la ecuación diferencial del modelo matemático del fenómeno físico de ingeniería por las frecuencias del componente del sistema dinámico.

Realmente lo de asociarle música al modelo en lugar de ruido se debió a que resulta más atractivo, sin embargo es lo mismo, y lo único que se hace, es utilizar una transformación para asignar frecuencias con formato MIDI (Musical Instrument Digital Interface) [Conger 1989, Young 1998] y escuchar un sonido relativo a las frecuencias factibles de ejecutarse con un instrumento musical.

Dentro de la enseñanza de las matemáticas es muy difícil en ocasiones asociar eventos de la realidad con la teoría de ciertas áreas de esta disciplina, sin embargo en el caso de las ecuaciones diferenciales se pueden identificar con mayor claridad algunas partes del proceso o fenómeno, ya que están asociadas a la dinámica principalmente. Asociarle ruido a una solución de un modelo matemático resultado de un fenómeno físico de ingeniería no tenía una sensibilidad para el usuario por lo que se pensó llevarlo a la música, solamente como una parte de la ociosidad, es decir, como un entretenimiento, ya que al final de cuentas es agradable al oído.

Ahora, ¿por qué el interés en este tipo de investigación?, porque puede ser valioso para la enseñanza y quizá de un valor didáctico importante. Al respecto hay muchas preguntas que quizá no tengan una respuesta y una factibilidad y por esa razón, lo dejaremos como un entretenimiento.

El proceso es intuitivamente muy simple ya que, de lo único que se trata, es trabajar en el dominio de las frecuencias más que en le dominio del tiempo y por tal motivo, a la solución de la ecuación diferencial le aplicamos la Transformada Rápida de Fourier (FFT) [Burden, Richard L, and Faires, Douglas, J. 1998].

Los resultados que se encontraron se muestran al final del documento y se obtuvieron con un programa escrito en lenguaje C y se utilizaron los “drivers” de audio para el sistema operativo Windows.

4. Algunas Consideraciones Respecto Al Audio En Multimedia

El audio en Multimedia complementa las aplicaciones y enriquece el medio ambiente con música, efectos de sonido y voz. Cada elemento de audio puede jugar diferentes papeles en aplicaciones de multimedia. La música pone el ambiente y enfatiza una aplicación. Los efectos de sonido adicionan variedad y realismo. La voz ofrece otra forma de presentar información. Alexander Graham Bell fue el primero en transmitir sonido usando técnicas analógicas. Los principios que descubrió aún son grandemente usados para la captura y reproducción de diversos tipos de sonido que incluye la música, narración, y efectos especiales de sonido. En años recientes sin embargo, técnicas digitales han sido desarrolladas por gente dedicada a la grabación y reproducción de sonido [Peña Guerrero, M. 2005].

El sonido es típicamente representado como una forma de onda continua. La forma de onda describe la vibración de las moléculas de aire, esto es, cuando algo causa la vibración de estas moléculas, percibimos la vibración como un sonido, por ejemplo cuando repentinamente se calienta el aire se escucha un tronido, como sucede con un flash.

Traducir una forma de onda analógica en una forma digital se hace tomando pequeñas muestras de onda en intervalos fijos en el sonido capturado. Este proceso establece la frecuencia de la forma de onda. Al mismo tiempo, los valores para las amplitudes de las formas de onda también son capturados definiendo la cantidad de información almacenada por muestra. Cada muestra es mapeada en un valor entero que se almacena. Estos valores enteros pueden ser usados para restablecer la forma de onda original. El resultado de ésto es la calidad de sonido prácticamente indistinguible del original.

Tres características pueden determinar la calidad y tamaño de una forma de onda digital: la frecuencia de las muestras, la cantidad de información almacenada por muestra, y el número de canales grabados.

Las muestras son tomadas en la misma frecuencia para dividir la forma de onda en porciones de tamaño idéntico. Cuanto más porción y más cálida mayor almacén en disco es requerido. Más porciones también se deben a tonos altos en sonido que serán grabados. Muestreo de 11.025 kHz solamente captura tonos bajos de 5.513 kHz en frecuencia.

Se debe notar que algo de información de la forma de onda se pierde en el proceso, Esto es por que la frecuencia de las muestras afecta directamente la calidad. Cuanto más frecuente las muestras cuanto menos información se pierde en aproximación. Las tres muestras de frecuencia de muestreo estándar son 44.1 kHz, 22.05 kHz y 11.025 kHz.

La cantidad de información almacenada por muestra específica es la precisión con que la muestra es medida. Información por muestra es derivada al dividir verticalmente cada prueba de forma de onda en unidades iguales. Una muestra de 8-bits divide cada muestra en 256 unidades iguales. Una muestra de 16-bits divide cada muestra en 65,536 unidades iguales.

El número de canales de sonido especifica si un registro produce una forma de onda (referido como monaural o mono) o produce dos formas de onda (referido como estéreo). El sonido estéreo es de mayor calidad pero requiere de doble cantidad de almacén.

Los archivos de sonido digital son grandes no importa la calidad que se escoja, pero las razones de muestreo más bajas producen archivos más pequeños que los de alta razón de muestreo. La siguiente fórmula se puede usar para estimar el almacén requerido en audio:

$$(\text{razón de muestreo} * \text{bits por muestra})/8 = \text{bytes/seg}$$

Por ejemplo un minuto de sonido monaural requiere del siguiente espacio:

Bits/muestra	Razón de muestreo	#Bytes requeridos	Calidad
8 bits	11.025kHz	0.66 MB/min	baja
8 bits	22.05 kHz	1.32 MB/min	media
16bits	44.1kHz	5.292MB/min	alta

Se debe mencionar también que existe un formato llamado MIDI (Musical Instrument Digital Interface) [Young Bob 1998] y que en el caso de captura de efectos no se emplea este formato. Establecido en 1982, MIDI es un estándar internacional para música digital. Especifica el tipo de cable y el Hardware para la conexión electrónica musical de instrumentos y computadoras de diferentes manufacturas. Y da un protocolo de comunicación para pasar datos de un aparato a otro. Cualquier instrumento puede contar con MIDI [Stan Gelber 1991], si tiene un microprocesador para procesar mensajes MIDI [Russell Lipton 1992] y cuenta con interfaces apropiadas de hardware.

Los archivos MIDI ofrecen algunos beneficios sobre las formas de onda de audio. Ellos son una serie de instrucciones y no una forma de onda y requieren muy poco espacio en disco. Por ejemplo una forma de onda de 8-bits de 22.05 kHz de 1.8 segundos puede requerir 41K. Un archivo MIDI de dos minutos puede requerir menos de 8K. Ya que el tamaño de los archivos MIDI es pequeño, se pueden tratar más fácil que los archivos de forma de onda. Se deben hacer notar las situaciones de cuando usar un archivo MIDI o un archivo de forma de onda. Se usa forma de onda de audio, cuando se necesita grabar voz, narración o sonidos de efectos naturales y poco tiempo de exposición. Se usa MIDI [Gil Cepeda, I. F 1982] [Peña Guerrero, M 1999] cuando se requiere realizar edición de partituras musicales, su grabación y reproducción orquestal.

Las notas musicales están definidas en términos de la frecuencia asociada a la nota, el tiempo de duración de la nota y una melodía asociada a la frecuencia de la nota, la armonía puede constar de varias notas en paralelo [Gil, C, F 1982], [Peña Guerrero, M 1999ab].

Si se divide una octava en doce tonos igualmente espaciados, entonces la nota final tendrá el mismo tono que la nota inicial, cada tono está separado por la constante 1.059463094... que corresponde a dos a la un doceavo.

Las frecuencias f de tonos igualmente temperados se calculan a partir de una frecuencia de referencia, el estándar de esta frecuencia de referencia corresponde a la nota LA (A) de 440 Hz, esta dada por: $f = (2^{\frac{n}{12}}) f_{ref}$ donde n es el número de semitonos entre la frecuencia de referencia y la frecuencia deseada.

En la tabla 1 se tienen los tonos y los números MIDI correspondientes a su frecuencia en Hertz, esta relación permite al sintetizador reproducir los tonos en una melodía.

Las matrices formadas por las tablas nos dan los tonos MIDI que corresponden a números enteros en el rango del intervalo [0, 95], así si x_{ij} es elemento general de la matriz, entonces *i* representa la nota y *j* la octava, ésto es: $x_{nota\ octava}$=*número MIDI*, por ejemplo $x_{A\ 4} =57$, como se muestra en la tabla 1, la celda sombreada, corresponde al tono LA y en la tabla 2, las frecuencias correspondientes a los tonos de la tabla 1.

Dentro de la enseñanza de las matemáticas es muy difícil en ocasiones asociar eventos de la realidad con la teoría de ciertas áreas de esta disciplina, sin embargo en el caso de las ecuaciones diferenciales se pueden identificar con mayor claridad algunas partes del proceso o fenómeno, ya que están asociadas a la dinámica de los mismos principalmente. Sin embargo asociarle ruido a una solución de un modelo matemático resultado de un fenómeno físico de ingeniería es demasiado complejo. En un principio se pensó que no tenía una sensibilidad o atractivo, por lo que fue mejor llevarlo a la música, solamente como una parte de la curiosidad, o bien, como un entretenimiento, lo cual no se debe interpretar como que no se tenía nada que hacer, sino que al final de cuentas era lo mismo pero el sonido es más agradable al oído.

Tabla 1: Relación funcional entre las notas, octavas de notas y los números MIDI

NOTAS	C	D∃	D	E∃	E	F	G∃	G	A∃	A	B∃	B
	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
	DO	RE∃	RE	MI∃	MI	FA	SOL∃	SOL	LA∃	LA	SI∃	SI
	DO	DO#	RE	RE#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI
	Nota(i)											
Octava (j)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
3	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
4	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
5	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
6	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
7	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95

Tabla2: Frecuencias en Hertz correspondientes a los tonos de la tabla 1.

0	16.35	17.32	18.35	19.44	20.60	21.82	23.12	24.49	25.95	27.50	29.1	30.86
1	3270	34.64	36.70	38.89	41.20	43.65	46.24	48.99	51.99	55.00	58.27	61.73
2	65.40	69.29	73.41	77.78	82.40	87.30	92.49	97.99	103.82	110.00	116.54	123.47
3	30.81	138.59	146.83	155.56	164.81	174.61	184.99	195.99	207.65	220.00	233.08	246.94
4	261.62	277.18	293.66	311.12	329.62	349.22	369.99	391.99	415.30	440.00	466.16	493.88
5	523.25	554.36	587.32	622.25	659.25	698.45	739.98	783.99	830.60	879.99	932.32	987.76
6	1046.50	1108.73	1174.65	1244.50	1318.51	1396.91	1479.97	1567.98	1661.21	1759.99	1864.65	1975.53
7	2093.00	2217.46	2349.31	2489.01	2637.02	2793.82	2959.95	3135.96	3322.43	3519.99	3729.31	3951.06

5. La Transformada Rápida De Fourier

Si se requiere hacer una transformada de Fourier a un conjunto finito de datos, el esfuerzo de llevar a cabo la computación es exorbitante. En la solución de problemas usando transformada de Fourier nos damos cuenta que al volver a evaluar las funciones seno y coseno un número de veces, se ve que sus valores pueden ser los mismos. Cuando integramos la transformada finita de Fourier calculamos senos y cosenos para ángulos alrededor del origen, como se muestra en la figura 2.

Si se requiere encontrar cos(nx) y sen(nx), nos movemos alrededor del círculo; cuando n=1, usamos cada valor en turno. Para otros valores de n, usamos cada n-ésimo valor, pero es fácil ver que esos repiten los previos valores. La Transformada Rápida de Fourier (FFT) [Cooley, J. W., and Tukey, J. W. 1965], [Brigham, E. Oran 1974] toma ventaja de este hecho para evitar cálculos repetidos.

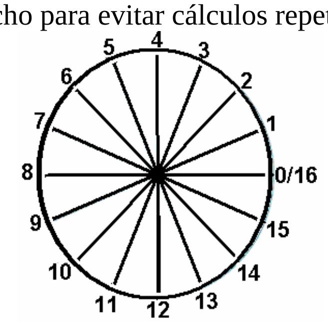

Figura 2. Ángulos usados en el cálculo de 16 puntos

En el desarrollo del algoritmo de la FFT, el método preferido es el uso de una forma alternativa de la serie de Fourier. En lugar de $f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}[A_n \cos(nx)+B_n \operatorname{sen}(nx)]$ con periodo 2π, usaremos su forma equivalente en términos de la exponencial compleja. Usando la fórmula de Euler con i = $\sqrt{-1}$. Esto es: $e^{inx}=\cos(nx)+isen(nx)$ por lo tanto f(x) se puede expresar como: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$ en donde los coeficientes c_j se obtienen de:

$$c_j=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ijx}dx \text{ con j=0}\pm 1 \pm 2 \pm \ldots$$

La magnitud de los coeficientes de Fourier | c_j | son el espectro de potencia de f. Estos muestran las frecuencias que son representadas en f(x). Si conocemos f(x) en el dominio del tiempo podemos identificar f calculando los coeficientes c_j's. La obtención de la serie de Fourier nos dice que hemos transformado del dominio del tiempo al dominio de frecuencias, un aspecto importante en el análisis de ondas.

Supongamos que se tiene N valores para f(x) en el intervalo $[0,2\pi]$ en puntos equidistantes, $x_k = 2\pi k/N$, k = 0,1, . . , N-1. Ya que f(x) es periódica $f_N = f_0$, $f_{N+1} = f_1$, y así sucesivamente. En lugar de una integración formal analítica, usaremos métodos de integración numérica para obtener los coeficientes. Aún si f(x) es conocida en todos los puntos de $[0, 2\pi]$ es preferible usar integración numérica. Esto emplearía solamente ciertos valores de f(x), usualmente evaluados en intervalos uniformes. Es también común que no se conozca f(x) en cualquier parte porque se tiene la muestra de una señal continua. En tal caso es mejor usar la Transformada discreta de Fourier, que se define como:

$$X(n)=\sum_{k=o}^{N-1} x_0(k)e^{\frac{-i2\pi nk}{N}} \quad \text{n = 0, 1, 2, . . . , N-1 (1)}$$

En la ecuación anterior se ha utilizado la notación conforme a la literatura de la FFT [Curtis, F. Geral and Wheatley, Patrick O. 1994], *X(n)* corresponde a los coeficientes de N términos de la frecuencia y los $x_0(k)$ son los N valores de la muestra de la señal en el dominio del tiempo. Se puede pensar de la *n* como el índice del término *X* y *k* como el índice del término x_0. La ecuación (1) corresponde a un conjunto de N ecuaciones lineales que pueden ser resueltas para las incógnitas *X(n).* Ya que ellas se encuentran en el lado izquierdo de la ecuación (1), se requiere solamente multiplicar un vector de N componentes por la matriz N×N.

Simplificando la notación, poniendo $W=e^{\frac{-i2\kappa}{N}}$, entonces el término del lado derecho de la ecuación (1) resulta $x_0(k)\, W^{nk}$. esto nos lleva a representar la ecuación (1) como:

$$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1} x_0(k)W^{nk} \qquad (2)$$

La solución del sistema de ecuaciones se obtiene usando la formulación de Cooley-Tukey [Cooley 1965] la ecuación (2) se puede factorizar dando una forma equivalente al conjunto de ecuaciones sin pérdida de generalidad y haciendo $W^0 = 1$ y $W^k = W^{k \bmod (N)}$

Para encontrar la FFT de un arreglo o valores de una función f(x) se elaboró un programa en lenguaje C con una función adicional para utilizar el sintetizador MIDI con la cual obtenemos tonos musicales en el rango del intervalo [0, 95]. Es conveniente recordar que la función tabular f(x) es una función en el tiempo y la solución de un problema de valor inicial de la forma y' = F(x, y); $y(x_0) = y_0$ obtenido de un fenómeno físico de ingeniería.

6. Resultados

Los resultados obtenidos para un archivo con 32 datos correspondientes a la función $f(x) = 1.5\cos(2\pi x) - 0.5 sen(\pi x) + 4 sen(4\pi x)$ son los siguientes:

1.5000	4.1170	4.8690	3.1250
-0.3540	-3.8180	-5.5230	-4.7050
-2.0000	-0.9520	2.4700	1.8390
-0.3540	-2.5320	-3.1310	-1.5400
1.5000	4.3120	5.2520	3.6800
0.3540	-2.9870	-4.5990	-3.7420
-1.0000	1.9330	3.4010	2.6700
0.3540	-1.9770	-2.7480	-1.3450

Los coeficientes de Fourier usando FFT son:

K	a =c(real)	b = c(imag)
0	-0.120687	0.000000
1	0.023603	-0.616058
2	1.611401	0.045418
3	-0.067142	0.098178
4	-0.084939	3.916284
5	0.100284	-0.065322
6	0.045674	0.109211
7	-0.117984	0.022632
8	0.000562	-0.117875
9	0.117649	0.233400
10	-0.046357	0.108593
11	-0.099476	-0.065752
12	0.084941	0.082862
13	0.066334	0.098062
14	-0.110719	0.044800
15	-0.023268	-0.115034
16	0.119563	-0.000000

Las frecuencias que representan f(x) son:

0.120687	0.615875	1.611877	0.120557
3.917606	0.120045	0.117549	0.120263
0.117877	0.119987	0.118480	0.119303
0.119684	0.118412	0.119808	0.117402

Los tonos amplificados 100 veces a estas frecuencias módulo 12 nos dan las notas que se escucha.

7. Conclusiones

Fue muy interesante escuchar los tonos de la solución de la ecuación diferencial, cuando sus frecuencias se tradujeron en el formato MIDI. Se pueden hacer muchos experimentos y el lector podrá observar la gráfica de la solución con el sonido y escuchar los cambios cuando las condiciones iniciales de la ecuación diferencial cambien. La razón principal de este trabajo fue asociar ruido del fenómeno físico de ingeniería a la solución del modelo matemático del mismo con la finalidad de obtener un ingrediente adicional en la didáctica de la enseñanza de ecuaciones diferenciales. En el tratamiento solamente se tomó como base las frecuencias resultado de la transformación de la solución de la ecuación en el dominio del tiempo al dominio de frecuencias. Por otra parte, también es posible asociarle sonido a los diferentes contornos de una superficie de nivel cuando se aplique este proceso a una función de dos variables. Desde el punto de vista de inteligencia artificial, se puede inferir sobre tonos o sonidos de la solución de la ecuación diferencial para tomar alguna acción particular que decida sobre otro proceso.

Referencias

Burden, Richard L, y Faires, Douglas, J. (1998). Análisis Numérico Ed. Tompson, sexta Edición.

Brigham, E. Oran (1974) The Fast Fourier Transform. Ed. Prentice hall USA.

Chapra, Steven C. y Canale (1999). Raymond P. Métodos Numéricos para Ingenieros. Ed. McGraw-Hill.

Cooley, J. W., and Tukey, J. W. (1965). An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier series Math Computation. Vol. 19, pp 297-301.

Curtis, F. Geral and Wheatley, Patrick O. (1994). Applied Numerical Analysis Ed. Addison Wesley.

Jim Conger (1989). MIDI sequencing in C, M & T Books.

Kris Jamsa (1993). La magia de multimedia, Mc Graw Hill-

Kincaid, David y Cheney, Ward (1994) Análisis Numérico Ed. Addison Wesley Iberoamericana.

Gil Cepeda, I. F. (1982). Diseño de un lenguaje musical (MUSFOR) y Construcción de un Compilador (MUS80). Tesis UAP, Puebla.

González Hernández, Manuel (1999). Mantenimiento Preventivo Basado en Audio en memoria del I Simposium Internacional de Informática y Telecomunicaciones de la Educación.

Peña Guerrero Maximino (1999). Algunas Formalidades de la Música, CIC-IPN.

Peña Guerrero Maximino (2005). Diseño de un Sistema en Tiempo Real para Capturar y Digitalizar Eventos MIDI (Tesis Doctoral). CINCESTAV-IPN.

Philip Shaddock (1992). Multimedia Creations, Waite Group Press.

Russell Lipton (1992). Multimedia Toolkit, Random House Electronic Publishing.

Stan Gelber (1991). Introduction to Data Communications: A practical Approach, Professional Press Books.

Young Bob (1998). The MIDI files. Prentice Hall, USA.

Authorization and Disclaimer