

Transformada de Fourier en aplicación en el diseño de filtros digitales para el procesamiento de imágenes.

Ph.D. Ramón Osvaldo Guardado Medina¹, Dr. Donato Vallín González²

¹ Centro Universitario de la Costa Sur, Autlán de Navarro Jalisco, México,
ramón.guardado@cucsur.udg.mx.

² Centro Universitario de la Costa Sur, Autlán de Navarro Jalisco, México,
dvallin@cucsur.udg.mx

Resumen.

El presente artículo tiene como objetivo, aplicar la función matemática de la transformada de Fourier en el procesamiento de imágenes, desarrollando filtros digitales y utilizando las herramientas MATLAB y Visual Studio, C Sharp. Se desarrolla en el contexto del dominio de la frecuencia, para la eliminación de bajas y altas frecuencias, lo que se traduce como suavizar la imagen, así como la detección de bordes. Mediante conversión de algoritmos matemáticos de los filtros pasa baja, pasa banda y pasa altas a lenguaje de programación, se realiza el análisis minucioso de las imágenes.

Palabras clave: Transformada de Fourier, procesamiento de imágenes, filtro Butterworth, filtro Gaussiano Matlab.

Abstrac.

This paper applies mathematical functions for images processing, designing digital filters, using MATLAB and visual studio tools. The development are in the frequency domain, with the propose to eliminate low and high frequency, It is like to tone down and edges detection, with the mathematical algorithms conversion. Making band pass filters with program languages.

Keywords: Fourier Transform, images processing, Butterworth filter, Gaussian filter, Matlab

1. Introducción.

La transformada de Fourier como herramienta matemática tiene uso en una gran variedad de aplicaciones en el procesamiento digital de señal e imágenes, el diseño y desarrollo de algoritmos para la implementación y decodificación e lenguajes de programación proporciona información más detallada.

El presente trabajo analiza la transformada de Fourier en el diseño de algoritmos de filtrado para el procesamiento de imágenes, acompañado de la transformada inversa que realza las frecuencias espaciales altas de modo que cuando es aplicado a imágenes que contienen formas geométricas sencillas permite realizar un proceso de segmentación, cuando es aplicada a imágenes con bordes poco diferenciados produce un realce de los mismos y cuando es aplicada a imágenes con ruido produce una reducción. (Goodman, 1996)

2. Métodos.

Una imagen se puede filtrar en el dominio de la frecuencia o en el dominio del espacio.

Los filtros en el dominio de la frecuencia se usan, principalmente, para eliminar altas o bajas frecuencias de la imagen, lo que se traduce en suavizar la imagen, o bien, realzar o detectar bordes.

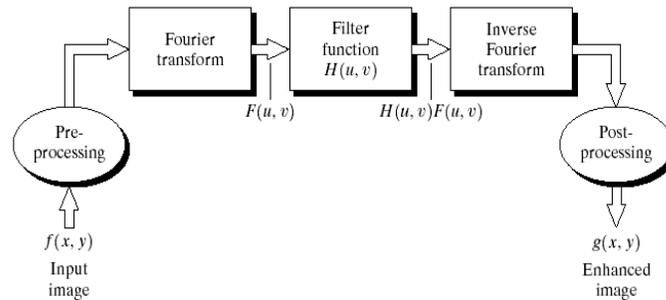


Figura 1: Diagrama a bloques de procesamiento de imágenes en frecuencia (González, 2004).

Los pasos a seguir son:

- Se multiplica cada entrada $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$.
- Se transforma la imagen en su dominio de la frecuencia mediante la Transformada Discreta de Fourier, $F(u,v)$.
- Se multiplica por un filtro de frecuencia $H(u,v)$, para cada (u,v) : $G(u,v)=H(u,v) F(u,v)$.
- Se calcula la inversa de la TDF de $G(u,v)$ (tomando la parte real), volviendo, así, al dominio del espacio.
- Se vuelve a multiplicar por $(-1)^{x+y}$. (Castleman, 1996)

3. Desarrollo.

Básicamente, hay tres tipos diferentes de filtros de frecuencia:

Filtros de paso bajo (**lowpass filter**). Deja inalterables las bajas frecuencias y atenúa o elimina las altas frecuencias. El resultado en el dominio del espacio consiste en un suavizado: eliminar pequeños detalles y ruidos de la imagen. El más sencillo es el “Filtro ideal de paso bajo”, en el que:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (1)$$

Donde $D(u,v)$ es la distancia euclidiana de (u,v) al origen del plano de frecuencias. Este filtro suprime las altas frecuencias mayores que un cierto valor D_0 , que se denomina frecuencia de corte, y deja las demás tal como están.

A diferencia del filtro ideal pasa-bajos, la función de transferencia del filtro Butterworth no tiene una discontinuidad evidente que establezca una frecuencia de corte bien determinada.

Para aquellos filtros que tienen una función transferencia continua (o suavizada) es común definir una frecuencia de corte en un punto tal que $H(u,v)$ esté por debajo de una cierta fracción de su máximo.

En el caso del filtro Butterworth, $H(u,v)=0.5$ (50% de su máximo valor, o sea, 1) cuando $D(u,v)=D_0$, para $n=1$, el filtro Butterworth no presenta oscilaciones; para $n=2$, las oscilaciones son casi imperceptibles; mientras que para $n>2$, los filtros Butterworth presentan oscilaciones indeseadas. Si bien se utilizan diferentes n para el cálculo del filtro Butterworth, el de segundo orden ($n=2$) es el que generalmente se elige ya que tiene un buen compromiso entre un filtrado pasa-bajos efectivo y oscilaciones de intensidad aceptable.

Los filtros pasa bajos más usados son los *Butterworth* y *el Gaussiano*, en el primero su orden n lo va haciendo más ideal cuando su índice n va aumentando, como se muestra en las figuras 2^a y 2^b. (González, 2004).

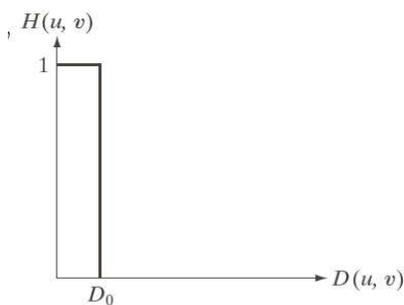


Figura 2^a: Filtrado ideal.

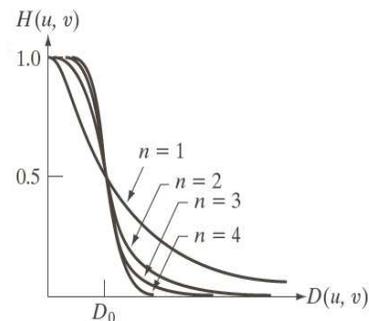


Figura 2^b: Filtro Butterworth de orden n .

Filtros de paso alto (**highpass filter**). Deja inalterables las altas frecuencias y atenúa o elimina las bajas frecuencias. El resultado en el dominio del espacio consiste en un realzado de los cambios bruscos de niveles de grises. De ahí que se use para detectar bordes. Las áreas de niveles de gris constantes o con poca variación se corresponden con las bajas frecuencias, que se suprimen. El más sencillo es el “*Filtro ideal de paso alto*”, en el que

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases} \quad (2)$$

Donde $D(u,v)$ es la distancia euclidiana de (u,v) al origen del plano de frecuencias. Este filtro suprime las frecuencias menores o iguales que un cierto valor D_0 , que se denomina frecuencia de corte. (González, 2004).

De igual forma el *Filtro Butterworth de paso alto de orden n* se describe en la fórmula (4).

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + (D_0 / D(u,v))^{2n}} \quad (3)$$

Donde $D(u,v)$ es la distancia euclídeana de (u,v) al origen del plano de frecuencias y D_0 es la llamada frecuencia de corte.

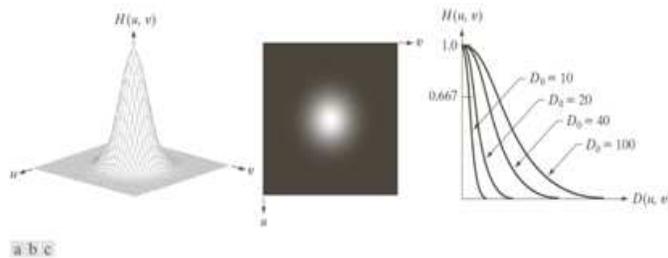


Figura 3: Filtro Ideal vs filtro Butterworth. (González, 2004).

$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2} \quad (4)$$

Debido a que, como se mencionó anteriormente, es más práctico trabajar con un espectro centrado (la frecuencia cero de la TDF en el centro), el centro del espectro está dado por $(u,v)=(M/2,N/2)$.

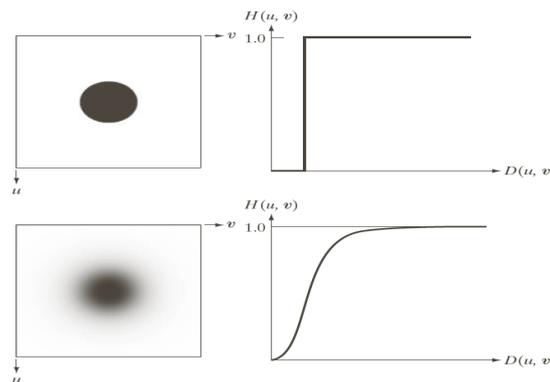


Figura 4: (a) Grafica de la Perspectiva de la función transformada, (b) filtro desplegado en una imagen (c) Filtro radial evaluado en varias secciones. (González, 2004).

Filtros de banda (**bandpass filter**). Un filtro de banda atenúa las altas y bajas frecuencias, pero mantiene intactas las frecuencias que se encuentren en una banda determinada. En el caso del filtro ideal, sólo deja pasar las frecuencias que están entre dos frecuencias de corte. Se puede obtener un filtro de banda multiplicando uno de paso bajo por uno de paso alto, en el que la frecuencia de corte del de paso bajo sea superior a la del de paso alto. El opuesto al filtro de paso de banda sería de “rechazo de banda” (bandreject o band-stop), en el que se atenúan las frecuencias de la banda, pero se mantienen la frecuencias fuera de ella. (González, 2004).

En el caso del gaussiano, se obtienen resultados comparables a los del filtro Butterworth (sin anillos). Mediante la transformada inversa de Fourier de $H(u,v)$ se obtiene un filtro espacial Gaussiano

Este tipo de filtro es de particular importancia ya que su forma está fácilmente especificada y porque tanto su TDF como su TDF inversa son funciones Gaussianas reales.

3.1. Filtro Gaussiano Pasa-bajos

La forma de este filtro está dada por:

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2} \tag{5}$$

Donde $D(u,v)$ es la distancia al origen del punto (u,v) (asumiendo que se ha centrado la transformada). Como vemos, este tipo de filtro tiene su máximo en $(0,0)$ que es 1, y luego su valor comienza a disminuir según la función Gaussiana cuya dispersión (o apertura) está dada por la constante σ . Una expresión más familiar del filtro Gaussiano es aquella en donde aparece la frecuencia de corte D_0 :

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2} \tag{6}$$

Cuando $D(u,v) > D_0$, los valores del filtro están por debajo del 60,7% de su máximo. Otra de las particularidades del filtro Gaussiano es que la TDF inversa de este tipo de filtro no presenta los efectos conocidos como *ringing*, algo que sí sucedía para el caso de los filtros Butterworth (para $n > 1$).

4. Resultados

El primer filtro que se presenta muestra de la forma ideal, con la cual se compararán los tipos de filtrado. La figura 5 muestra la imagen principal, junto con su espectro de frecuencias en la figura 6.



Figura 5: Imagen Principal.

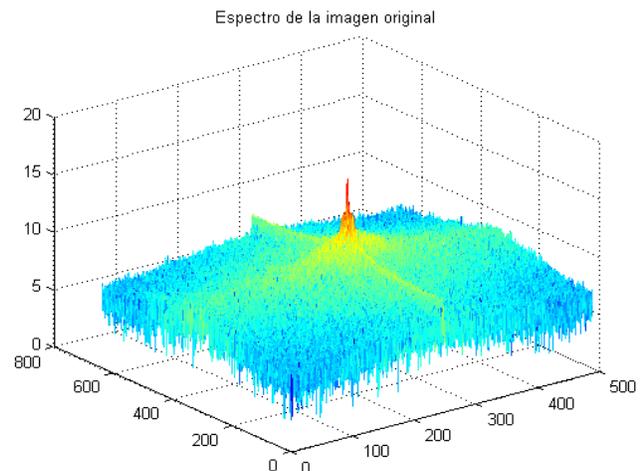


Figura 6: Espectro de Frecuencias de la Imagen Principal.

Se aplica un filtro pasa bajos el cual se muestra el deterioro en la imagen siguiente seguido del espectro el cual solo deja pasar frecuencias deseadas con una distancia euclidiana central.



Figura 7: Imagen filtrada.

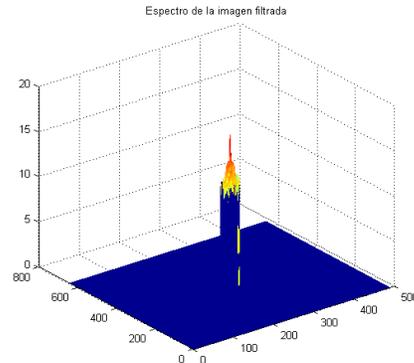
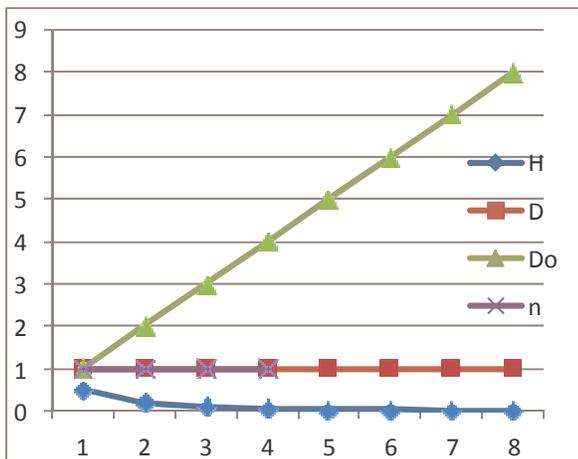


Figura 8: Espectro de frecuencias la imagen filtrada.



Gráfica 1: Filtro Butterworth Pasa bajas $n = 1$ $D_0 = \text{variable}$.

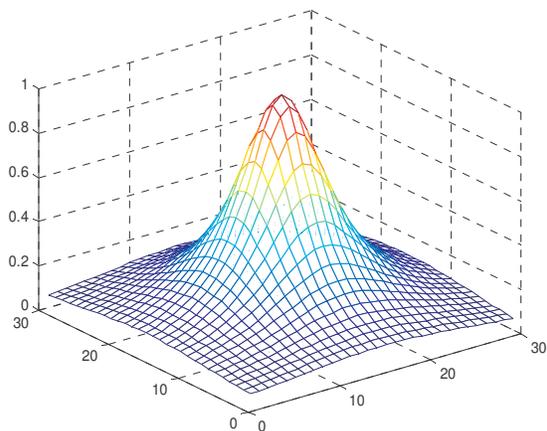
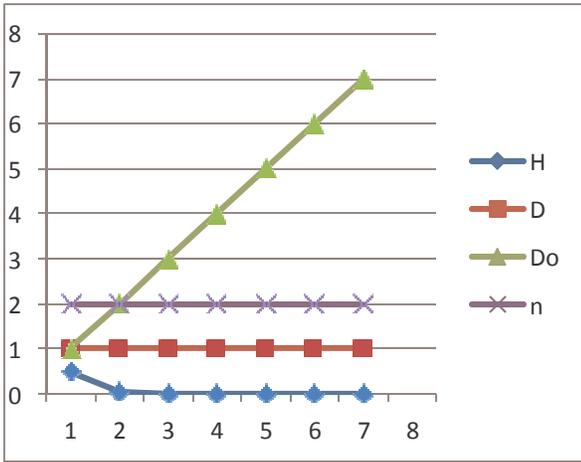


Figura 9: Filtro Pasa Bajas de orden 1, tipo Butterworth

Las gráficas 1, 2, 3 muestran el filtrado pasa bajas de tipo Butterworth, se observa que a varios cambios de frecuencia de corte en aumento (D_0), el mismo se mantiene dejando pasar solo las frecuencias bajas y eliminando las altas. Se observa que al variar el orden del filtro, tiene un comportamiento de bajada pronunciado o tenue, de este modo se compara las gráficas con la figura 2^b.

Usando la herramienta de MATLAB para la representación del comportamiento del filtro se toma en cuenta el siguiente criterio $lpfilter(\text{tipo}, M, N, D_0, n)$

- $H = \text{fftshift}(lpfilter('btw', 300, 300, 50, 1))$
- $\text{mesh}(H(1:10:300), 1:10:300)$.



Gráfica 2: Filtro Butterworth Pasa bajas $n = 2$, $D_o = \text{variable}$.

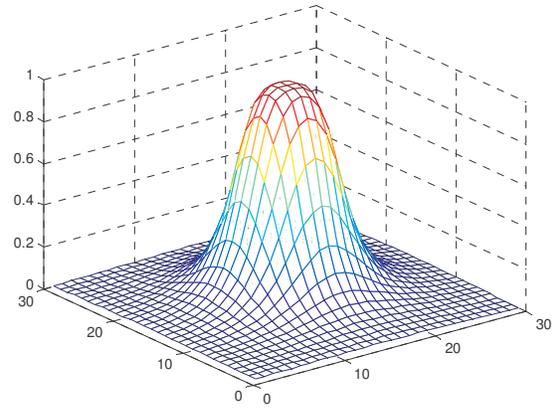
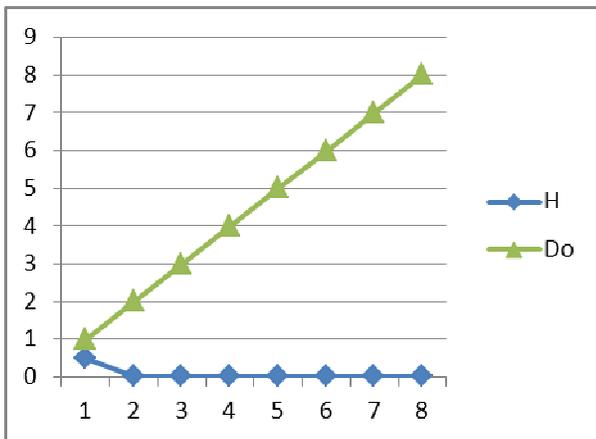


Figura 10: Filtro Pasa Bajas de orden 2, tipo Butterworth.



Gráfica 3: Filtro Butterworth Pasa bajas $n = 3$, $D_o = \text{variable}$.

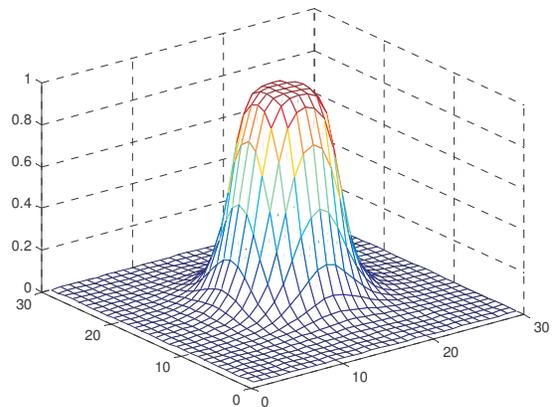


Figura 11: Filtro Pasa Bajas de orden 3, tipo Butterworth.

Cuando el filtro es aplicado a una imagen, se denota los cambios que surgen en la misma al elevar el orden del filtro, se puede observar los niveles de grises y la nitidez de la figura 12 vs figura 13 y 14.



Figura 12: Imagen Principal.

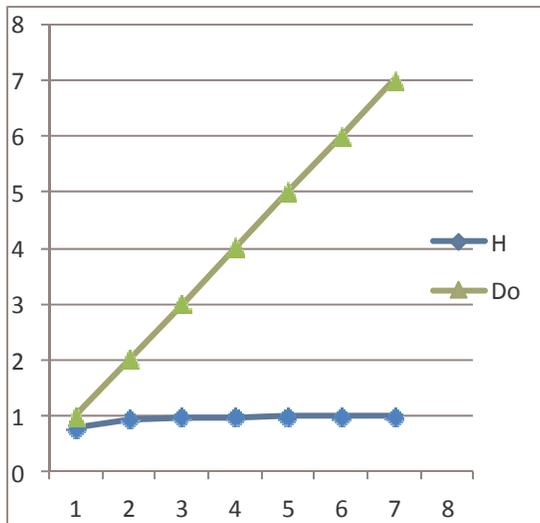


Figura 13: $n = 2$,
 $Do = variable$.

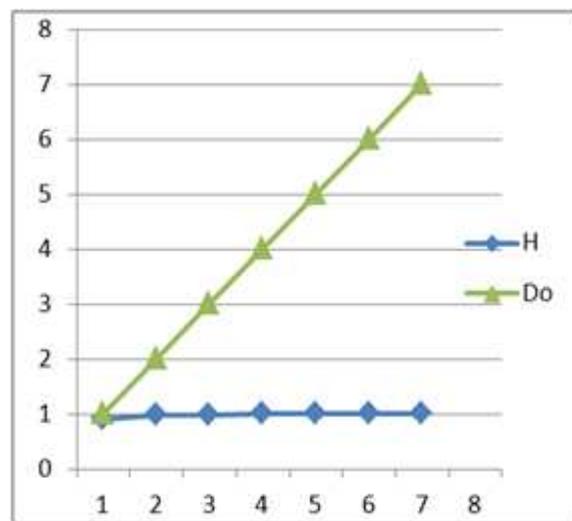


Figura 14: $n = 2$,
 $Do = variable$.

De igual forma se analiza el filtro pasa altas, en donde la comparación del filtrado ideal parte de que en 1 automáticamente el filtro comience a dejar pasar las frecuencias altas, sin embargo se denota que conforme aumenta el orden del filtro este llega a ser similar a un ideal. (Véase gráfica 4 y 5).



Gráfica 4: Filtro Butterworth Pasa Altas $n = 1$,
 $Do = variable$.



Gráfica 5: Filtro Butterworth Pasa bajas $n = 2$,
 $Do = variable$.

La figura muestra el filtro pasa altas de tipo Butterworth, de orden 1 usando MATLAB

- `H=fftshift(hpfilter('btw', 300, 300, 50, 1));`
- `mesh(H(1:10:300), 1:10:300);`

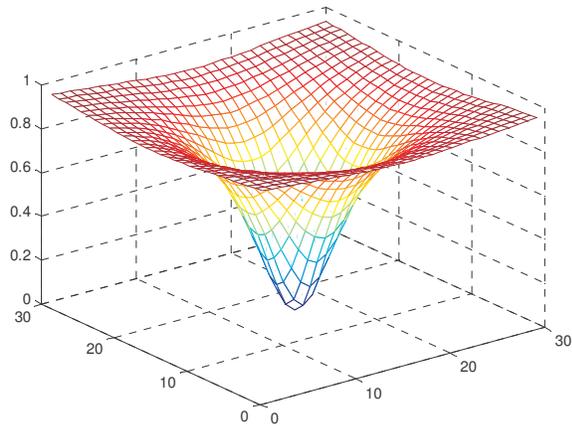


Figura 15: Filtro Pasa Altas de orden 1, tipo Butterworth.



Figura 16: Imagen con ruido.



Figura 17: Filtrado pasa altas.

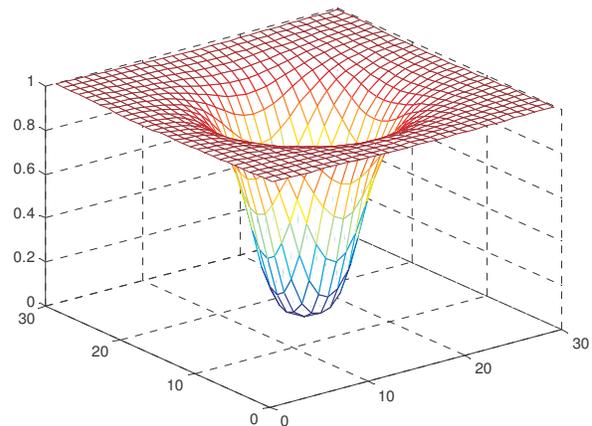


Figura 16: Filtro Pasa Altas de orden 2, tipo Butterworth.

5. Conclusiones.

De acuerdo al análisis espectral realizado en el presente artículo, como la frecuencia está directamente relacionada con la velocidad de los cambios en el nivel de gris, es fácil asociar intuitivamente las frecuencias en la TDF con patrones en las variaciones de la intensidad del nivel de gris. Como mencionamos, la componente de frecuencia de variación más lenta ($u=v=0$) corresponde al promediado de los niveles de gris en la imagen. A medida que nos alejamos del origen de la transformada, la frecuencia de las componentes va aumentando correspondiendo a variaciones en la intensidad cada vez más rápidas.

6. Bibliografía.

1. Goodman Joseph (1996) "Introduction to Fourier Optics" second Edition McGraw Hill Companies, INC. NY.
2. Castleman K (1996) "Digital Image Processing" Prentice Hall NJ.
3. Escalera Hueso, Arturo (2001) "Visión por computador" Pearson Educación S. A. Madrid.
4. G. Bachman, L. Narici y E. Beckenstein, (2002) "Fourier and wavelet analysis", Springer-Verlag, New York.
5. González Rafael C y Woods E. Richard (2004) "Digital Images Processing using MATLAB". Addison-Wesley / Diaz de Santos.
6. Goodman Joseph (1996) "Introduction to Fourier Optics" second Edition McGraw Hill Companies, INC. NY.
7. Pinsky Mark A. (2003) "Introducción al análisis de Fourier y ondeletas" International Thomson Editores.

Autorización y Renuncia

Los autores autorizan a LACCEI para publicar el escrito en los procedimientos de la conferencia. LACCEI o los editores no son responsables ni por el contenido ni por las implicaciones de lo que esta expresado en el escrito

Authorization and Disclaimer

Authors authorize LACCEI to publish the paper in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.