Creación de clusters para una mejor oferta de actividades extraescolares en Barcelona, España

Manuel Mateo
UPC, Barcelona, España, manel.mateo@upc.edu

Miquel Subirachs
UPC, Barcelona, España, miquel.subirachs@upc.edu

Jordi Martínez
UPC, Barcelona, España

Pere Figueras
UPC, Barcelona, España

Mayra D'Armas
UNEXPO, Puerto Ordaz, Venezuela, mdarmas@unexpo.edu.ve

RESUMEN

Las actividades extraescolares que se realizan en un centro escolar a veces son muy limitadas, por los recursos disponibles o porque no coinciden con las preferencias de su alumnado. Para ampliar la oferta de actividades a otras que no tengan lugar en el recinto de un centro escolar, se propone la creación de clústers que agrupen diferentes Colegios de Educación Infantil y Primaria (CEIP) de Barcelona, España. Para ello, se deberá resolver un problema de cobertura y garantizar los medios de transporte a los escolares para desplazarse de un centro educativo a otro o incluso a centros deportivos, donde puedan realizar sus tareas extraescolares preferidas. En primer lugar, se plantea un programa matemático que halle las asociaciones entre diferentes centros educativos y se implementa una heurística para la resolución del problema. Posteriormente, se implementa otro programa matemático para definir la ruta óptima entre los miembros del clúster. En los clusters también se pueden incluir, además de los centros escolares, otras asociaciones de interés donde realizar estas actividades. Como resultado se obtienen diferentes clusters que internamente tendrán la posibilidad de organizarse para poder ampliar la oferta de actividades de cada uno de sus miembros. La propuesta de transporte de pasajeros (niños y niñas) se basa en la disponibilidad de uno o dos autocares por cluster.

Palabras claves: Problema de cobertura, Clusters, Programación Lineal, Transporte, Centros Escolares.

ABSTRACT

Extra-curricular activities conducted in a school are sometimes very limited, due to the available resources, or do not match the preferences of their students. In order to expand the range of activities and include those done outside the grounds of a school, we propose the creation of clusters that group different Primary Schools (CEIP) in Barcelona, Spain. To do this, we must solve a set covering problem and ensure transportation to the children if they need to move from one school to another or even to a sports center, where they can enjoy their preferred activities. First, we propose a mathematical program to define the associations between different schools and a heuristic is implemented to solve this problem. Subsequently, another mathematical program is implemented, which defines the optimal path between cluster members. In clusters, other interest associations which can perform these activities may be included, besides the schools. The result is that the different clusters will be able to organize themselves in order to expand the range of activities for each one of the members. The proposed passenger (children) transport is based on the availability of one or two coaches per cluster.

Keywords: Set Covering Problem, Cluster, Linear Programming, Transport, Schools.

1. INTRODUCCIÓN

La ciudad de Barcelona (España) dispone de una oferta educativa en centros públicos y privados en la que se trabaja día a día para mejorarla y para fomentar la cohesión social a través de su red educativa. Las actividades extraescolares (Rosenfeld y Wise, 2002) tienen cabida dentro del programa de actividades complementarias que se propicia desde la política municipal. No obstante, la demanda de actividades extraescolares es insuficiente. Este síntoma se puede analizar desde diversas perspectivas: empresas no especializadas ante la falta de demanda, actividades de moda que requieren instalaciones no disponibles en centros escolares, actividades que no tienen un precio asequible, carencia de instalaciones para realizar actividades de potencial interés, exceso de oferta debido a la presencia de academias, clubes recreativos y otras entidades en competencia a las actividades organizadas en las escuelas, actividades que no alcanzan al mínimo de rentabilidad de escolares apuntados, actividades con grupos de diferentes niveles y una monitorización inadecuada...

Las actividades extraescolares se han convertido en un complemento de la jornada escolar de muchos niños y niñas, pero también en algunos casos son necesarias si los dos miembros de la pareja trabajan a la hora de salir los niños de la escuela. Este tipo de actividad posterior al horario escolar favorece el desarrollo personal de los niños y niñas y debe contribuir a despertar inquietudes, reforzar conocimientos, fomentar la creatividad, promover las relaciones con otras personas y desarrollar valores. Los lugares donde se pueden hacer suelen ser los propios centros escolares, públicos o privados, centros de barrio, academias o clubes deportivos, entre otros. La diferencia básica en función del lugar donde se realizan suele ser el precio, siendo menor en la propia escuela porque son actividades que pueden ser subvencionadas.

Las actividades extraescolares solicitadas por los escolares de un centro educativo de primaria a menudo no se pueden realizar por falta de un número mínimo de alumnos. Actualmente no existe coordinación de actividades entre centros educativos, y por ello sólo se ofertan y demandan en cada centro un número concreto de actividades. Así, se pretende que la oferta de actividades no sea exclusiva de una escuela, donde los alumnos estudian, sino que englobe otras y también entidades del barrio, formando así un tejido asociativo. Para ello, se deberá proporciona el medio de transporte para el desplazamiento de los niños.

La necesidad de diversificar las actividades ofrecidas a los alumnos de un centro escolar lleva a la realización de este trabajo, que tiene como ámbito de actuación los Centros de Educación Infantil y Primaria, CEIP de la ciudad de Barcelona. Inicialmente el proyecto sólo contempla los centros públicos de la red educativa. A partir de ahora utilizaremos indistintamente las expresiones CEIP y centro educativo para designar a una escuela.

En este estudio se presenta una propuesta de creación de clústers entre los diferentes Colegios de Educación Infantil y Primaria. Con la clústerización de los CEIPs, agrupación de centros educativos próximos, se permite ampliar la oferta y la demanda. Se ha determinado previamente que cada clúster de CEIPs estará formado por un mínimo de 4 y un máximo de 5, que deberán coordinarse. Así, se permite confeccionar una oferta de actividades en cada centro con la posibilidad de incorporar otras que gestionen otras entidades. Con el fin de transportar a los alumnos entre centros se deberá implementar una red eficiente de transportes. Este trabajo culminará con la determinación de rutas para la realización de actividades extraescolares, fuera del horario escolar obligatorio, destinadas a niños y niñas de edades comprendidas entre los 3 y 11 años.

En la Sección 2 se presenta la determinación de clústeres en el conjunto de escuelas públicas de Barcelona. En la Sección 3 se diseña las rutas para cada uno de los clústeres, para a continuación evaluar la capacidad de transporte en los flujos de niños y niñas entre centros en la Sección 4. El trabajo concluye con las conclusiones del estudio en la Sección 5.

2. CLUSTERIZACIÓN DEL GRAFO

Dado que se trata de un problema de localización, cuya representación puede ser a través de un grafo, cada uno de los centros educativos pasará a denominarse nodo (Francis y White, 1974). En la ciudad de Barcelona existen 164 ubicaciones de centros educativos públicos. Sin embargo, tomando en cuenta que en algún caso la distancia que los separa es mínima de cara a compartir instalaciones, el número de ubicaciones se puede simplificar. El número simplificado de centros educativos es de 160.

2.1 ANÁLISIS DE LOS CENTROS EDUCATIVOS Y MODELIZACIÓN EN FORMA DE GRAFO

Se quieren formar subgrupos que permitan un recorrido entre nodos inferior a 15 minutos en el caso de un autocar o de 30 minutos en el caso de 2 autocares, haciendo este segundo autocar el recorrido inverso al primero. Inicialmente se parte de un grafo de 160 nodos. Este es un volumen de datos significativo para hacer un tratamiento, por lo que se hacen unas consideraciones iniciales para ver si se puede descartar algún nodo.

2.1.1 SET COVERING PROBLEM (SCP).

Se define el problema de la cobertura, en inglés *Set Covering Problem* (SCP), dado un universo *U* (en este caso formado por el conjunto *C* de todos los centros educativos) y una familia *S* de subconjuntos a encontrar (clústeres de CEIP s). Se trata de un problema ampliamente estudiado, del que encontramos estudios desde más antiguos (Schilling et al, 1993) a más recientes (Farahani et al, 2012). La cobertura o solución para el problema es, por tanto, una subfamilia $S \subseteq C$ que en unión da por resultado *C*. Cada uno de los *m* clústeres creados son conjuntos disjuntos, dado que no se permiten que un nodo pertenezca a más de un clúster: $S=\{S_1,\ldots,S_m\}$ tales que $S_1\cup\ldots\cup S_m=C$.

Se trata de planificar la distribución de centros en el universo definido, de manera que desde un centro no exista una distancia al centro más cercano superior a una cantidad de tiempo, que viene por condicionada por el tiempo de recorrido en autocar entre ambos puntos. Se asimila todo centro, como depósito o punto de partida de una ruta de autocar, a una instalación y por lo tanto se busca la cobertura para el resto de centros del entorno, de manera que quede definido un subconjunto. Esto debe realizarse considerando cada centro educativo como depósito y, por lo tanto, se producen un gran número de intersecciones entre subconjuntos. La solución consiste en hallar el mínimo de subconjuntos que abrazan el universo *U*, sometido a la limitación de tiempo establecida (Farahani et al, 2012).

La resolución del problema genérico, que permite realizar una clusterización, es que no garantiza una magnitud deseada en cuanto a número de centros educativos por subconjunto. Por otra parte, se puede definir todo centro como depósito, pero de hecho no hay un número mínimo de centros de depósito.

2.1.2 RESTRICCIÓN DE TIEMPO MÁXIMO DE INTERRELACIÓN ENTRE NODOS

Se estima que el tiempo máximo que puede esperar un niño o niña en un centro educativo para ser recogido por un medio de transporte o autocar que lo lleve a otra instalación o encontrarse de camino a donde realiza la actividad, lo que se llama “situación de parking”, es de 15 minutos. Esto implica que la ida y vuelta entre dos nodos sea igual o inferior a los 15 minutos, ya que se estima como tiempo máximo para iniciar una actividad una vez terminadas las clases. Por lo tanto, se establece como condición inicial que ninguna interrelación entre nodos sea superior a los 7 minutos. O sea, que el valor asociado a un arco del grafo deberá tener un valor de 7, a lo sumo. Asimismo, no debe olvidarse que conforme aumenta el tiempo de recorrido entre nodos disminuye la fiabilidad de cumplimiento de los horarios, atendiendo por ejemplo a los imprevistos del tráfico.

Además, se contemplará la posibilidad de tener hasta dos autocares por clúster, lo que implica que no se permitan los clústeres en los que el recorrido óptimo para ir desde un primer nodo hasta el último nodo y viceversa supere los 30 minutos.

Además con esta restricción disminuyen en gran medida las interrelaciones entre nodos, para mayor simplificación de la clusterización. Consecuentemente, se suprimen todos aquellos arcos que unen dos nodos en los que la ida o la vuelta se superen los 7 minutos. El sentido de circulación de las calles implica que no siempre el tiempo para desplazarse entre un nodo *i* y un nodo *j* (ida) sea el mismo que realizar el recorrido inverso (vuelta).

2.1.3 GRAFO CONSIDERANDO LA RESTRICCIÓN DE TIEMPO MÁXIMO DE INTERRELACIÓN ENTRE NODOS

En el grafo de la Figura 1 se representan los 160 nodos, además de sus interrelaciones, o sea el conjunto de arcos. En dicha representación gráfica, realizada mediante el software “Grafos” de Rodríguez (2011), se observa que el grafo no es conexo, dado que hay cuatro subgrafos diferentes que deberían ser evaluados por separado. Además, se observa que los nodos 49 y 50 están bastante aislados del resto de nodos. Así pues, se decide no buscar ninguna alternativa para que formen parte de un clúster y se excluyen del estudio.

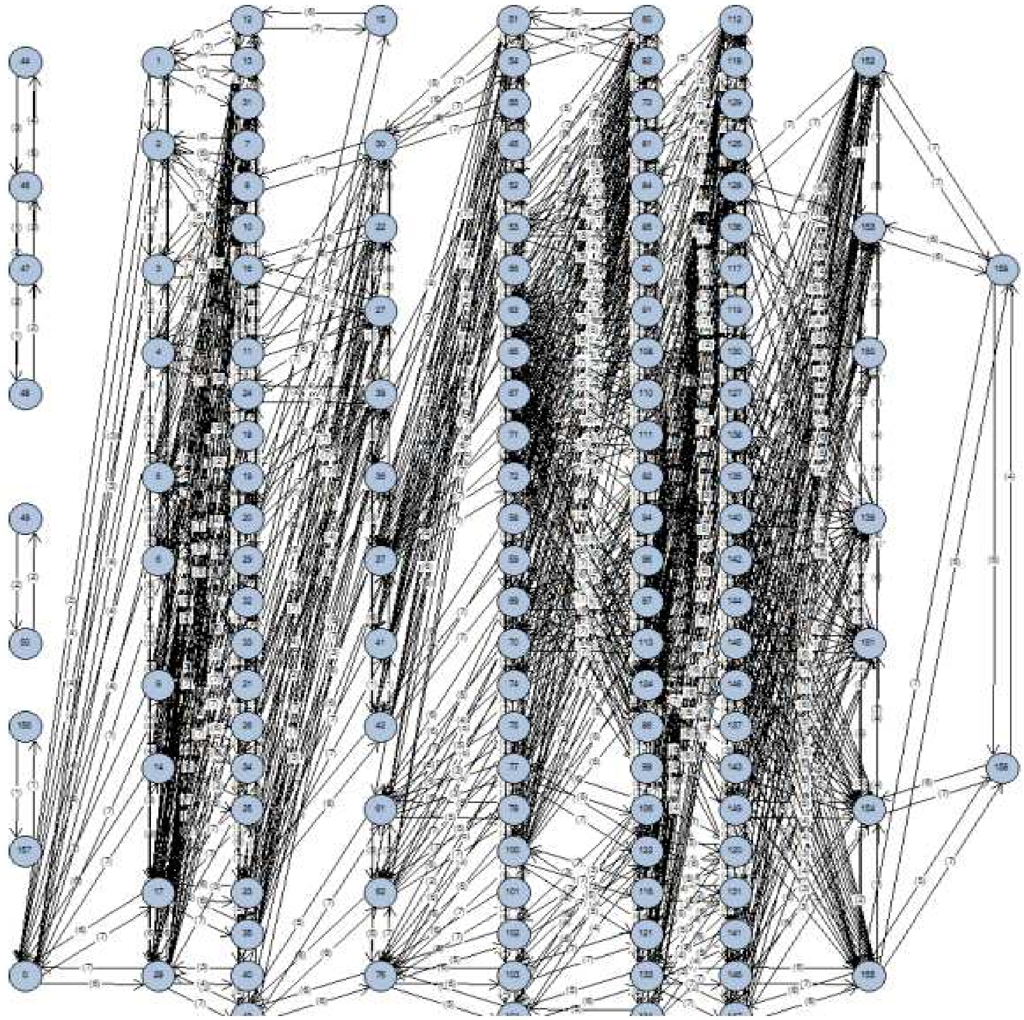

Figura 1: Grafo del conjunto de puntos con la restricción de tiempos máximos de interrelación entre nodos

2.2 PROCEDIMIENTOS DE CLUSTERIZACIÓN

Se parte del subgrafo G obtenido tras la reducción inicial, formado por 148 nodos, los cuales se quieren dividir en clústeres. La clasificación de nodos en diferentes subgrupos o clústeres no es simple, ya que se requiere que cada subgrupo esté formado por un mínimo de 4 y un máximo de 5 nodos.

El procedimiento debe ser particional y, por lo tanto, se formarán pequeños subconjuntos que cumplan las condiciones de magnitud mencionadas en el párrafo anterior. Además, se debe recordar el límite de 30 minutos en el recorrido para ir desde un primer nodo hasta el último nodo y viceversa. A continuación se hace una recopilación de los métodos probados. El procedimiento elegido es la heurística 2, que no garantiza el óptimo.

2.2.1 PROGRAMA MATEMÁTICO

Se define un programa matemático para hallar el mínimo de arcos entre nodos sin que ningún nodo del subgrafo G quede aislado (par óptimo). El objetivo será una vez minimizada la función objetivo (Ec. 1.), respetar el máximo posible estas interrelaciones para formar clústeres de 4 hasta 5 nodos, al tiempo que se evalúa su viabilidad y repercusión sobre la creación de otros clústeres. También hay que tener en cuenta que se han excluido los recorridos (o sea arcos) que no cumplen la restricción de tiempo máximo de recorrido (7 minutos). No se ha considerado el tiempo de parada en cada centro.

Parámetros: La magnitud que define y condiciona este problema de clusterización es la variable continua tiempo, que se mide en minutos. No obstante, los valores que se han utilizado son enteros.

t_{ij} = tiempo (en minutos) de recorrido desde el centro *i* hasta el centro *j* $\quad$ i,j=1,…,n

Cabe recordar que t_{ij} puede ser diferente de t_{ji}, ya que este valor depende de los sentidos de circulación de las calles que forman parte del camino mínimo entre ambos centros. Así, pues se dispone de una matriz que representa el tiempo de transporte entre todos los nodos con la condición de que este tiempo sea no superior a 7 minutos.

Variables: Las variables del modelo son binarias: $x_{ij} \in \{0,1\}$. Estas variables expresan la idoneidad de contar o no con cada posible recorrido entre par de nodos. Su valor es 1 cuando se escoge la relación entre ese par de nodos. Hay que añadir que los recorridos que no cumplen la restricción de tiempo máximo de recorrido entre nodos ya se excluyen y no se definen las correspondientes variables binarias.

$x_{i,j}$: variable binaria que indica si el recorrido entre el nodo *i* y el nodo *j* se escoge ($x_{i,j}=1$) o no ($x_{i,j}=0$).

$$\exists x_{i,j} \in \{0,1\} \quad si\ i \neq j\ y\ t_{i,j} \leq 7 \qquad i=1,\ldots,n\ ;\ j=1,\ldots,n$$

El programa matemático resultante es el siguiente:

$$[\text{Min}]\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} \times x_{i,j} \qquad \text{(Ec. 1)}$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1/i\neq j}^{n} x_{i\,j} \leq 2 \quad i=1,\ldots,n \qquad \text{(Ec. 2)}$$

$$\sum_{j=1/i\neq j}^{n} x_{i\,j} \geq 1 \quad i=1,\ldots,n \qquad \text{(Ec. 3)}$$

$$x_{i,j} = x_{j,i} \quad i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n \qquad \text{(Ec. 4)}$$

La función objetivo (Ec. 1) tiene como objetivo minimizar la suma de tiempos de transportes entre nodos sin que ningún nodo quede aislado, lo que se considerará en las restricciones. Las restricciones son de tres tipos. Las primeras (Ec. 2) obligan a que el número de arcos que emergen de un nodo a todos los demás sea menor o igual que 2 (dado que a lo sumo el nodo puede ser el punto intermedio de un recorrido). Las segundas (Ec. 3) obligan a que como mínimo el número de arcos que emergen de un nodo a todos los demás sea uno. Así, ningún nodo quedará aislado. Finalmente, las restricciones del grupo (Ec. 4) obligan a que si se escoge un arco que emerge de un nodo e incide en otro nodo *j*, hay que escoger también el arco en sentido inverso, emergiendo de *j* e incidiendo en *i*.

2.2.2 HEURÍSTICA 1

El primer paso consiste en forzar al programa a través de una restricción para encontrar el mínimo número de recorridos, ida y vuelta, entre pares de nodos, de manera que no quede ningún nodo aislado. La solución es óptima. De hecho, se llega a una de las soluciones que forman parte de un óptimo múltiple.

A continuación, se incrementa en 2 arcos reiteradamente (ida y vuelta) el valor de la restricción del número mínimo de recorridos y se observa que se van formando circuitos de longitud mayor.

El paso intermedio en cada incremento consiste en eliminar del modelo aquellos arcos que contienen un número ya adecuado de nodos que permita crear un itinerario. Esto está pensado para los primeros circuitos en 15 minutos y un número mínimo de 4 nodos, para ampliar posteriormente los márgenes hasta 5 nodos o bien 30 minutos conforme se reduzca la matriz de datos considerados.

En cada incremento, también se evaluará la necesidad de incluir restricciones que imposibiliten la creación de los ciclos que se van formando. El motivo es que al menos dos nodos deben ser depósito (extremos de la cadena).

El método es eficiente, pero provoca la creación de clústeres que dejan aislados pares de nodos, los cuales por localización no tienen probabilidad de asociarse a otras cadenas. Por otro lado, también se crean circuitos aislados de 3 nodos que no reúnen el requisito de número mínimo de nodos para formar un clúster. El motivo vuelve a ser que existen nodos que están estrechamente relacionados, es decir con un tiempo mínimo de recorrido entre ellos, y otros que lo están menos.

2.2.3 HEURÍSTICA 2

El método finalmente usado parte del resultado del primer paso del método anterior y consiste en buscar clústeres gráficamente, partiendo de los extremos en cuanto a localización. Se propone una heurística con las siguientes reglas:

- Resolución gráfica iniciando asociaciones desde los extremos en dirección al centro.
- No pueden haber asociaciones de más de 4 ni de menos de 5 nodos. Por lo tanto, se podrán romper las cadenas existentes para no excluir a los conjuntos formados por menos de 4 nodos o evitar conjuntos que contengan más de 5 nodos.

Una vez se ha elegido una asociación con otros extremos se evalúa el resultado del itinerario, según la función objetivo, y se compara con otras posibilidades de asociación entre parejas de arcos que no aíslen ningún otro par.

Dada la conveniencia de creación del clúster, no se eliminan gráficamente los arcos que forman parte del mismo, sino que se considera como clúster provisional y se continúa con el proceso para evaluar la conveniencia de formar clústeres alternativos.

2.3 RESOLUCIÓN DE LA CLUSTERIZACIÓN

Primero, consiste en encontrar el óptimo del programa matemático planteado, donde el valor resultante de la función objetivo no es definitivo dado que habrá que añadir restricciones de asociación para garantizar el número mínimo de nodos por clúster. Se quiere conseguir que se formen el mínimo número de subconjuntos de nodos sin que ningún nodo quede aislado y que esta interrelación entre nodos sea respetada lo máximo posible en la formación de los clústeres. Hay que añadir que el método rompe hasta cuatro veces los circuitos entre pares de nodos definidos en el primer paso y lo hace con el fin de equilibrar los clústeres.

La solución obtenida es óptima, aunque se dispone de varias (es óptimo múltiple). Para encontrar estas otras posibles soluciones, el resultado de la función a optimizar debe ser el mismo.

3. DISEÑO DE RUTAS CONSIDERANDO SOLO CENTROS EDUCATIVOS

En una primera fase se diseñan las rutas incluyendo sólo centros educativos. La inclusión de otras instalaciones será opcional, ya que la conveniencia de incluir actividades extraescolares que requieran de las instalaciones de otras entidades lo decidirán las personas responsables de cada centro en el clúster. Sea **X** el conjunto de los *n'* nodos de un clúster ($4 \leq n' \leq 5$) y **U** los arcos del clúster que cumplen la restricción de tiempo máximo de recorrido y definen las posibles rutas. El grafo G(**X**, **U**) asociado al problema es orientado y conexo.

3.1 PROGRAMA MATEMÁTICO

Variables: Se parte de los clústeres del apartado 2.3 donde las variables binarias son tantas como recorridos factibles entre nodos de un mismo clúster. Por lo tanto, existen variables $x'_{i,j} \in \{0,1\}$ para i=0,...,n' y j=0,...,n' para indicar si el recorrido entre el nodo *i* y nodo *j* forma parte de la solución ($x'_{i,j}=1$) o no ($x'_{i,j}=0$):

$$\exists x'_{i,j} \in \{0,1\} \quad si\ i \neq j\ y\ t_{i,j} \leq 7 \qquad i=1,\ldots,n\ ;\ j=1,\ldots,n$$

Para cada clúster debe resolverse el programa matemático siguiente:

$$[Min]\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} \cdot x'_{i,j} \qquad \text{(Ec. 5)}$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1/i \neq j}^{n} x'_{i,j} \leq 2 \quad i = 1,\dots,n' \qquad \text{(Ec. 6)}$$

$$\sum_{j=1/i \neq j}^{n} x'_{i,j} \geq 1 \quad i = 1,\dots,n' \qquad \text{(Ec. 7)}$$

$$x'_{i,j} = x'_{j,i} \quad i = 1,\dots,n';\ j = 1,\dots,n' \qquad \text{(Ec. 8)}$$

$$\sum_{i=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n'} x'_{i,j} = 2 \cdot n' \qquad \text{(Ec. 9)}$$

La función objetivo (Ec. 5) y las tres primeras restricciones (Ec. 6 a Ec. 8) son similares al modelo descrito en la anterior Sección. La última restricción (Ec. 9) indica que para crear un camino entre *n’* nodos pasando por todos ellos, hacen falta *n’* arcos y deben estar definidos en ambos sentidos, siendo el número de arcos de la ruta 2·n’.

3.2 Asignación de Rutas Óptimas

La resolución del programa matemático indica las siguientes rutas haciendo referencia a los nodos (ver Tabla 1).

Tabla 1: Asignación de Rutas Óptimas

Ruta	Nodos	Tiempo de recorrido (min)	Ruta	Nodos	Tiempo de recorrido (min)
A	157-156-159-158	28’	R	73-81-63-72-66	17’
B	48-47-46-44	14’	S	0-1-5-9	17’
C	43-39-34-35-27	28’	T	96-93-95-92-94	10’
Ç	140-135-142-139	18’	U	153-152-154-155	13’
D	105-104-102-103	11’	V	36-30-37-53	19’
E	109-111-110-89-86	18’	W	19-17-24-26	19’
F	106-116-122-121	15’	X	141-147-146-151	14’
G	137-143-149-150-136	18’	Y	31-32-33-40	10’
H	90-108-85-84	15’	Z	10-12-13-14	22’
I	38-51-52-42-41	23’	AA	138-145-144-148	8’
J	60-57-58-54	15’	AB	62-45-55-56	24’
K	99-88-98-83-59	22’	AC	101-78-74-70	16’
L	126-125-123-112:	16’	AD	119-120-118-124	22’
M	65-64--82-87	10’	AE	127-130-129-128	9’
N	28-29-18-25	18’	AF	22-21-20-23	15’
Ñ	117-115-114-113	19’	AG	3-2-4-6	10’
O	100-77-76-61-75	30’	AH	69-68-67-79	18’
P	133-134-132-131	19’	AI	80-91-97-107	11’
Q	7-8-11-16	13’			

En la Tabla 1 pueden diferenciarse dos tipos de rutas. El primer grupo incluye todas aquellas cuyo tiempo de recorrido sea hasta 15 minutos, en cuyo caso hace falta un único autocar para cubrir el transporte del clúster. El segundo grupo incluye aquellas otras cuyo tiempo de recorrido se encuentra entre 15 y 30 minutos, en cuyo caso son necesarios dos autocares que cubran el recorrido del clúster en sentido directo e inverso, respectivamente.

Para incluir las instalaciones externas en las rutas, éstas se deben añadir como un nodo más, incrementándose el orden del grafo en función del número de instalaciones añadidas.

4. CÁLCULO DE LA CAPACIDAD DE TRANSPORTE

Se define un depósito en cualquiera de los 2 extremos si la ruta sólo necesita un autocar y 2 depósitos (en cada extremo) para 2 autocares. El recorrido máximo de autocar se ha estimado en 15 minutos. No obstante, se compara los ratios entre tiempos de ruta y tiempo de recorrido para redondear el número de autocares. Dado el coste de un autocar, se desea que el porcentaje de desviación a la hora de escoger otro no supere el 15%. Por lo tanto, para ratios superiores a 1,15 se escogerán 2 autocares. Si sólo se incluyen como nodos los centros escolares y se excluyen las instalaciones de otras entidades externas, son necesarios 55 autocares.

Cálculo de la capacidad para un depósito

La matriz de demanda determina el flujo en cada arco, considerando las cargas y descargas de escolares en cada nodo. La capacidad de transporte requerida (número mínimo necesario de plazas del medio de transporte) se corresponderá con aquel arco del grafo que tenga el flujo máximo. Consecuentemente, se puede decir que el sistema más eficiente es aquel que tiene los valores del flujo de la matriz de demanda iguales. De esta forma, se pueden mover más escolares establecida una determinada capacidad de transporte (Hall, 2003).

Sea $y_{i,j}$ = número de escolares del nodo *i* que se han de transportar al nodo *j*. El flujo que sale de un nodo, en función de la dirección del recorrido en el grafo, se puede calcular mediante la ecuación para el recorrido de ida (Ec. 10) y la ecuación para el de vuelta (Ec. 11) de la siguiente manera:

i j	**1**	**2**	**…**	**n’**
1	0	$y_{1,2}$		$y_{1,n'}$
2	$y_{2,1}$	0		$y_{2,n'}$
..			0	
n’	$y_{n',1}$	$y_{n',2}$		0

$$f_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n''} y_{i,j} \qquad k=1,\ldots,n''-1 \qquad \text{(Ec. 10)}$$

$$f_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j+1}^{n''} y_{i,j} \qquad k=1,\ldots,n''-1 \qquad \text{(Ec. 11)}$$

Dados el máximo flujo del recorrido de ida (Ec. 12) y del de vuelta (Ec. 13):

$$C' = \underset{k=1,\ldots,n''}{Max} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n''} y_{i,j} \right\} \qquad \text{(Ec. 12)}$$

$$C'' = \underset{k=1,\ldots,n''}{Max} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j+1}^{n''} y_{i,j} \right\} \qquad \text{(Ec. 13)}$$

Se determina el flujo máximo (Ec. 14) en un sentido u otro en el grafo:

$$C = \text{Max}\,\{C' \,;\, C''\} \qquad \text{(Ec. 14)}$$

A continuación, se muestra su aplicación en el Ejemplo 1.

Ejemplo 1. La ruta D sin instalaciones es un ejemplo del cálculo de la capacidad del transporte necesario para realizar el servicio en un clúster. En este caso, se simula el transporte de escolares de 4 nodos, que tiene un tiempo total de operación de 11 minutos y transporta un total de 58 escolares. (Ver Figura 2).

	103	102	104	105
103	-	2	-	-
102	1	-	2	-
104	-	2	-	3
105	-	-	1	-

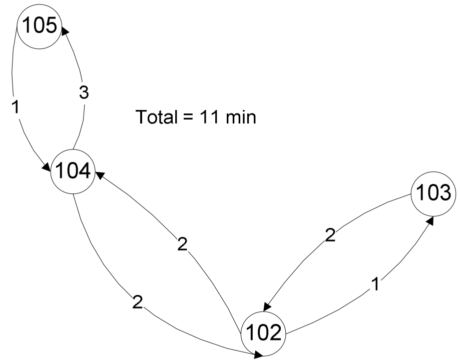

Figura 2: Ejemplo flujo de capacidad constante para un depósito

Cálculo de la capacidad para dos depósitos.

Si la ruta establecida en el grafo requiere 2 depósitos el cálculo de la capacidad de cada medio de transporte es similar. Sin embargo, cada medio de transporte actúa sobre cada uno de los triángulos (superior e inferior) de la matriz de demanda, y se obtiene la capacidad mínima de cada vehículo (se calcula C' y C" sin encontrar el máximo).

La holgura es una variable que depende de la capacidad del medio de transporte y de la demanda de viajes en cada nodo. Esta variable permitirá determinar en cada caso la aceptación o no de futuras oscilaciones de flujos de pasajeros en función de su viabilidad económica o estratégica y comercial de la empresa.

Ejemplo2. Capacidad mínima del autocar: 20. Número total de pasajeros transportados: 58. Con un mini bus de 20 plazas se pueden mover 58 pasajeros. En la Tabla 2 se observa también la holgura en cada arco del grafo (número de asientos vacíos en el autocar). Se define $W_{i,i+1}$ al flujo de escolares en el arco entre los nodos *i* e *i+1*. De manera similar, se define $W_{j-1,j}$. Este último dato sirve para un posterior análisis de sensibilidad (admisión o no de más pasajeros según la ruta).

Tabla 2: Tabla de demanda para un depósito.

Demanda ruta	103	102	104	105	$W_{i,i+1}$	Holgura
103	0	8	4	5	17	3
102	6	0	6	5	20	0
104	7	4	0	5	15	5
105	1	4	3	0	0	20
$W_{i,i-1}$	0	14	16	8		
Holgura	20	6	4	12		

En este caso, para transportar los mismos 58 escolares se requiere como mínimo dos mini buses de capacidad 20 y 16 plazas. La eficiencia alcanzable en el transporte (ocupantes / plazas disponibles) es en este caso superior (90/108) a la del apartado anterior (90/120).

Tabla 3: Tabla de demanda para dos depósitos (modificación del ejemplo anterior).

Demanda ruta	103	102	104	105	$W_{i,i+1}$	Holgura
103	0	8	4	5	17	3
102	6	0	6	5	20	0
104	7	4	0	5	15	5
105	1	4	3	0	0	20
$W_{i,i-1}$	0	14	16	8		
Holgura	16	2	0	8		

5. CONCLUSIONES

El problema planteado consiste en proporcionarle medios de transporte a los escolares de un centro educativo a otro centro educativo o deportivo donde realizar sus tareas extraescolares preferidas. Para ello se crean clústers que agrupan los diferentes centros educativos públicos de la ciudad de Barcelona (España).

Utilizando modelos de programación lineal se ha realizado la clusteritzación de los nodos de un grafo para hacer más eficiente la cooperación de los centros educativos. Este hecho permitirá tanto la reducción de los costos de las actividades como el aumento de la eficiencia del transporte en términos de pasajeros transportados dentro de unos márgenes de tiempo establecidos. No obstante, esta agrupación de CEIPs es teórica y cualquier otra agrupación puede ser factible técnica y económicamente siempre que se cumplan las restricciones de tiempo y capacidad de transporte. Será determinante en cada clúster los beneficios resultantes de las gestiones realizadas y posible control de todas las actividades que se realizan en los diferentes centros educativos y demás instalaciones interesadas en participar.

REFERENCIAS

Farahani R Z, Asgari N, Heidari N, Hosseininia M, Goh M (2012), Covering Problems in Facility Location: A Review. Computer & Industrial Engineering, Vol. 62, pp. 368–407.

Francis, R.L. y White, J.A. (1974). Facility layout and location an analytical approach. (1st ed.)Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, US.

Hall, Randolph W. (2003). Handbook of transportation science. 2nd ed. Boston [etc.] : Kluwer Academic, cop.

Rodríguez Villalobos, Alejandro (2011). Software lliure Grafos v. 1.3.1/2010, Programa per a la construcció i edició de grafs en mode tabular o gràfic. Disponible on line en: http://arodrigu.webs.upv.es/grafos/doku.php

Rosenfeld, Alvin y Wise, Nicole (2002). La Hiperescolarización de los niños: las actividades extraescolares, una presión añadida para tus hijos, título original: The Over-scheduled-Child. Editorial Paídos Paídos Ibérica, Barcelona, España.

Schilling D A, Jayaraman V, and Barkhi R (1993), A Review of Covering Problems in Facility Location. Location Science, Vol. 1, pp. 22–55.

Autorización y Renuncia