

Análisis de estructuras solicitadas a carga axial por métodos matriciales. Caso de estudio: Torre de conducción

Saray Sorayelli Sepulveda Cruz

Universidad Santo Tomás, Bogotá D. C., Colombia, saraysepulveda@usantotomas.edu.co

Cristian Sebastián Contreras Alfonso

Universidad Santo Tomás, Bogotá D. C., Colombia, cristiancontrerasa@usantotomas.edu.co

Jonathan William Medina Limas

Universidad Santo Tomás, Bogotá D. C., Colombia, jonathanmedina@usantotomas.edu.co

Andres Mauricio Muñoz Quesada

Universidad Santo Tomás, Bogotá D. C., Colombia, andresmunozq@usantotomas.edu.co

Ingrid Yineth Parra Sanchez

Universidad Santo Tomás, Bogotá D. C., Colombia, ingrid.parra@usantotomas.edu.co

Faculty Mentor:

Sherley Catheryne Larrañaga Rubio

Universidad Santo Tomás, Bogotá D. C., Colombia, sherleylarranaga@usantotomas.edu.co

RESUMEN

El análisis estructural y la modelación de la torre de energía, será de gran importancia para el crecimiento y formación como estudiantes de ingeniería civil. El siguiente artículo pretende dar a conocer los beneficios que trae la implementación del método de rigidez matricial para el análisis de estructuras tridimensionales con ayuda de Excel y modelación en SAP 2000 que permite evidenciar el comportamiento mecánico de la torre de energía. Se observan los dos métodos utilizados para el análisis estructural de una torre de energía, los cuales serán explicados respectivamente, y veremos sus ventajas y desventajas al usar cada uno de ellos; también se resalta la importancia del uso de herramientas computacionales ya mencionadas.

Palabras clave: modelación, análisis matricial, sap2000, nodos

ABSTRACT

Structural analysis and modeling of power tower will be important for the growth and training as civil engineering students. The following article seeks to highlight the benefits that brings the implementation of matrix stiffness method for the analysis of three-dimensional structures using Excel and modeling with SAP 2000 which makes evident the mechanical behavior of the power tower. It observes the two methods used for structural analysis of a power tower, which will be explained respectively, and see its advantages and disadvantages to using each of them also highlights the importance of using computational tools mentioned above.

Keywords: modeling, matrix analysis, SAP2000, nodes.

1. INTRODUCCIÓN

La utilización de los métodos clásicos de análisis estructural en ingeniería civil, que tienen su origen a fines del siglo XIX, eran a menudo demasiados laboriosos y extensos cuando estos se aplicaban en un contexto real, por lo cual se les consideraba un tanto defectuosos debido a su tamaño y complejidad. Por tal razón diferentes generaciones de ingenieros se encargaron de la reducción de este tipo de cálculos, esto debido a que la carrera de

la aeronáutica necesito generar el análisis de estructuras con mayor rapidez y exactitud de cálculos para las estructura de sus aviones, hasta ir desarrollando paulatinamente el método matricial que conocemos hoy en día, el cual se pudo desarrollar gracias a la aparición de ordenadores capaces de facilitar el trabajo numérico.

El empleo de la notación matricial presenta grandes ventajas en el cálculo de las estructuras, primordialmente permite utilizar los métodos de cálculo en forma compacta, precisa, y general. Este proporciona un mejor procedimiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean opacados por operaciones de cálculo o de desigualdades físicas entre estructuras.

Este método proporciona un sistema adecuado de análisis estructural y suministra una plataforma sólida para el desarrollo de programas computacionales como sap2000. Pero esto no implica que los cálculos realizados por métodos matriciales sean sistemáticos, por ello es tan conveniente la utilización de herramientas como Excel que radica en la eliminación de operaciones rutinarias y laboriosas, al igual que la factibilidad que tiene el ingeniero de preparar el modelo con el que pretende representar la realidad. Ahora la utilización de un modelo es de vital importancia en el desarrollo y la comprensión de la estructura, gracias a los aportes que presenta en la visualización de los efectos que otras variables pueden ejercer sobre el proyecto, entendiéndose este como la representación de la naturaleza o comportamiento de un cuerpo real, sin la modelación adecuada podría presentarse una contemplación errónea en los resultados de la misma, por lo cual es indispensable detallar las variables del problema. Y analizar su reciprocidad para una mayor comprensión.

Por medio del presente artículo se intentará desarrollar una mayor comprensión del método de rigidez matricial por medio de un modelo con elementos finitos unidimensionales tipo barra orientados en cualquier posición en el espacio, para lograr una capacitación más amplia en la ejecución de obras que impliquen un análisis más complejo, bajo el entendimiento de lo expuesto a través de este medio se mostrará los resultados obtenidos de la modelación de una torre de energía..

2. MARCO REFERENCIAL

Se consideran seis etapas fundamentales en la solución de un problema de análisis por el método de rigidez matricial: 1. Identificación y análisis de la estructura. 2. cálculo de la matriz de rigidez de barra y del vector de cargas nodales equivalentes. 3. cálculo de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de la estructura. 4. Introducción de las condiciones de borde. 5. solución del sistema de ecuaciones. 6. cálculo de demandas en los extremos de barras y reacciones nodales.

En cuanto a la simulación computacional del mismo se deben tener de igual manera tres etapas definidas: 1. pre-proceso, el cual es previo a las ecuaciones algebraico-diferenciales. 2. La solución este es el algoritmo efectuado bajo el esquema de los elementos finitos en sap2000. 3. Posproceso se calcula las magnitudes derivadas de los valores obtenidos para los nodos.

3. EL MÉTODO DE RIGIDEZ POR MEDIO MATRICIAL:

Se toma como hipótesis que la estructura es lineal, se supone que todos los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas, donde las barras son rectas y de sección constante. Para el análisis de una estructura por este método, deben estar presentes tres conjuntos de ecuaciones que se deben cumplir: ecuaciones de compatibilidad (relacionan las deformaciones de barras con los desplazamientos nodales); ecuaciones constitutivas (se relacionan las fuerzas en los extremos de barras con los desplazamientos nodales); ecuaciones de equilibrio (se introducen las constitutivas en las ecuaciones de equilibrio para la obtención de fuerzas nodales en función de desplazamientos nodales). Para la solución de la estructura se procede de la siguiente manera, primero se generan las primeras incógnitas que corresponden a los desplazamientos, las bases principales para desarrollar dicho método son los grados de libertad, la relación fuerza-desplazamiento y ecuaciones de equilibrio. Para entender dichos pasos se hará una breve explicación de estos:

3.1. GRADOS DE LIBERTAD:

Hace referencia al número de posibles desplazamientos, representados inicialmente con elementos finitos unidimensionales tipo barra en tres modelos básicos que son: la armadura, la viga y el marco. Para inferir sobre los grados de libertad de un elemento se debe conocer el tipo de apoyo que presenta, determinando la posibilidad de desplazamiento y restricciones que se le puedan atribuir. (Ver tabla 1)

Tabla 1: Tipos de apoyos, restricciones y desplazamientos.

TIPOS DE APOYOS	RESTRICCIONES	DESPLAZAMIENTO
APOYO SIMPLE	$f_x \neq 0$	$dx = 0$
	$f_y \neq 0$	$dy = 0$
	$m = 0$	$\Theta \neq 0$
APOYO GUIADO EN RODILLOS	$f_x = 0$	$dx \neq 0$
	$f_y \neq 0$	$dy = 0$
	$m = 0$	$\Theta \neq 0$
APOYO EMPOTRADO	$f_x \neq 0$	$dx = 0$
	$f_y \neq 0$	$dy = 0$
	$m \neq 0$	$\Theta = 0$
APOYO LIBRE	$f_x = 0$	$dx \neq 0$
	$f_y = 0$	$dy \neq 0$
	$m = 0$	$\Theta \neq 0$
APOYO ELÁSTICO	$f_x \neq 0$	$dx \neq 0$
	$f_y \neq 0$	$dy \neq 0$
	$m \neq 0$	$\Theta \neq 0$

La armadura: es el tipo de estructura en la cual sus elementos trabajan a carga axial, haciendo que en esta todos los nodos trabajan como articulaciones.

La viga: Es el tipo de estructura que es capaz de soportar momentos tales como el flexionante y la fuerza cortante, en cada uno de sus elementos.

El marco: Esta estructura puede soportar carga axial, momento flexionante y fuerza cortante en cada uno de sus elementos.

3.2. LA RELACIÓN FUERZAS DESPLAZAMIENTOS:

Tiene como fin generar los posibles desplazamientos con respecto a las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, dando como relación la fuerza aplicada en el elemento, la rigidez de este y el desplazamiento generado del mismo con la fórmula:

$$[F] = [K][\delta]$$

Donde: **F**: Fuerza aplicada.

K: Rigidez del elemento.

δ: Desplazamiento del elemento.

También la podemos ver en el plano y se tiene:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ \theta \end{bmatrix}$$

y en el espacio:

3.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO:

Estas son las que relacionan las fuerzas externas con las fuerzas internas en cada nodo. Se entiende como fuerzas externas a las fuerzas actuantes sobre la estructura, y a las fuerzas internas como la reacción de cada elemento sobre las fuerzas actuantes, y estas se utilizan para darle un equilibrio estático, es decir que la estructura no va a tener movimiento significativo. En la figura 1 se establece la nomenclatura para las ecuaciones de cada elemento que se halla en la estructura:

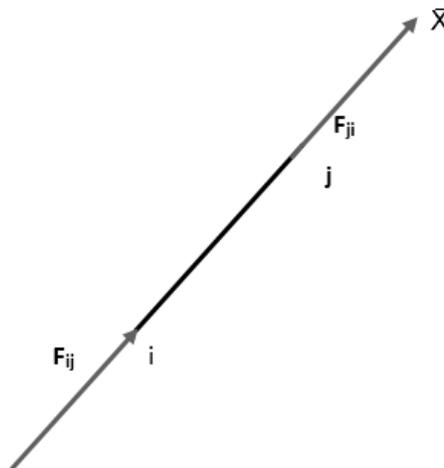


Figura 1: Nomenclatura de elementos.

A continuación se establecen las ecuaciones de equilibrio que actúan sobre cada elemento:

$$\bar{F}_A = \bar{F}_{2a} + \bar{F}_{1c} + \bar{F}_{1b}$$

$$\bar{F}_A = [I \quad I \quad I]_x \begin{bmatrix} \bar{F}_{2a} \\ \bar{F}_{1c} \\ \bar{F}_{1b} \end{bmatrix}$$

4. MODELO DE CERCHA DE ALTURA, TIPO TORRE DE TRANSMISIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA

Este tipo de estructuras metálicas cuya función principal es sujetar los conductores eléctricos aéreos para el transporte de energía eléctrica, se encuentran expuesto a diferentes fenómenos provenientes del medio en el cual se han desarrollado, ya sean antrópicos climatológicos o demás, que disminuyen el desempeño de la misma.

Para el análisis de estas estructuras que son vitales para el desarrollo de una sociedad, se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones: el número de conductores a sujetar, tensión mecánica de los conductores, afectación del viento tanto en conductores como en la estructura de la torre, tipo de composición del suelo y/o anclaje e implicaciones medioambientales.

Ahora debido al carácter de modelación estructural, solamente se considerará la estructura como un conjunto de elementos unidimensionales. En donde se determina el comportamiento de la misma, implicando dentro de su análisis las barras sujetas a las fuerzas máximas.



Figura 2: Torre de transmisión de energía. (<http://es.123rf.com>)

5. ANÁLISIS POR MEDIO DEL MÉTODO MATRICIAL Y MODELACIÓN EN SAP2000 DE LA TORRE DE TRANSMISIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA:

Para realizar el análisis por el método matricial y en SAP 2000, se seleccionó una torre de energía típica, como se muestra en la figura 2. Las características se presentan en la tabla 2. Para el análisis se determinará el elemento de mayor compresión, el elemento de mayor tensión, los desplazamientos del punto más alto de la torre, desplazamientos de los tres brazos de la torre.

Tabla 2: Características de la Torre

Altura	11,3
Area	42.6451 cm ²
Material	STEEL: 20389019 T/m ²

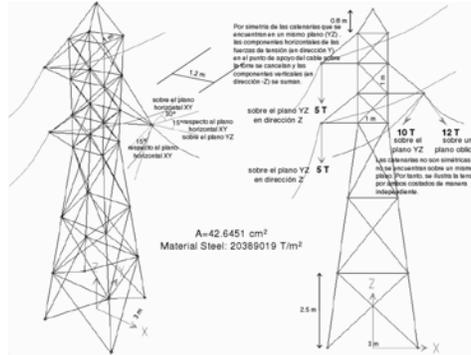


Figura 2: Representación de la torre de energía en 3D

5.1. MODELACIÓN EN EXCEL

Antes de iniciar la modelación, se debe establecer qué tipo de estructura se analizará, el tipo y magnitud de las cargas impuestas. Se puede observar que la estructura que se va a trabajar es una torre eléctrica metálica, la cual va a trabajar con carga axial, es decir como se pudo ver en el punto anterior es una estructura tipo armadura, la cual va a contar con 32 nodos y 112 elementos, ya con lo anterior se debe a empezar de la siguiente manera:

1. Se asigna una numeración de nodos coherentes.
2. Se inicia generando el modelo idealizado de la estructura.
3. Se nombran los elementos de tal forma que el primer número corresponde al nodo inicial y el segundo número al nodo final.
4. Se deben asignar las coordenadas de cada elemento.
5. Establecer las longitudes de los elementos.
6. Establecer el área de los elementos.
7. Es conveniente realizar un cuadro de resumen, el cual debe incluir:
 - 7.1. El área de cada uno de los elemento (**A**).
 - 7.2. Coordenadas de cada nodo (**x, y, z**).
 - 7.3. Longitud de los elementos (**L**), con la siguiente formula $L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 - 7.4. El módulo de elasticidad de cada elemento (**E**), este debe ser dado por el problema o también se puede buscar en otras fuentes correspondiente al tipo de material que se va a usar.
 - 7.5. Luego de tener estos datos determinamos **K** de cada elemento, con la siguiente ecuación: $K = AE/L$.
 - 7.6. Después se realizara el cálculo de los cosenos directores (λ, ν, μ), de acuerdo con las siguientes ecuaciones: $\lambda = \frac{x}{L}$ $\nu = \frac{y}{L}$ $\mu = \frac{z}{L}$
 - 7.7. En seguida se puede se debe elevar cosenos directores al cuadrado (λ^2, ν^2, μ^2)
 - 7.8. También se debe formar las siguientes combinaciones de los cosenos directores ($\lambda\nu, \lambda\mu$ y $\nu\mu$)
 - 7.9. Luego de encontrar los cosenos directores y sus respectivas combinaciones se multiplican por **K** para agilizar el planteamiento de las matrices de rigidez elementales.

$$[Fa] = [Kan][Knn]^{-1}[Fn]$$

8. Con los valores del cuadro de resumen se procede al planteamiento de las matrices de rigidez elementales en coordenadas globales.

$$k = \left[\frac{AE}{L} \right] \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu & -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu \\ \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu & -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \lambda\mu & \mu^2 & \mu\nu \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{bmatrix}$$

9. Se ensambla la matriz de rigidez de la estructura: se toman las matrices de los elementos y se unen en un sistema más grande el cual será la matriz global, los espacios de dicha matriz que no correspondan a algún valor se llenarán de ceros (se puede realizar lo mismo en cada matriz del elemento lo que se denominará matriz expandida) para evitar dañar la integridad de la matriz.
10. Se procede a realizar el análisis de las condiciones de los apoyos y reordenar según ellas la matriz de rigidez estructural de tal forma que se cumpla la siguiente ecuación :

$$\begin{bmatrix} Fn \\ Fa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Knn & Kna \\ Kan & Kaa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta n \\ \delta a \end{bmatrix}$$

11. Las matrices planteadas anteriormente se resuelve utilizando las siguientes ecuaciones:

$$[\delta n] = [Knn]^{-1}[Fn]$$

12. Con las anteriores ecuaciones determinamos los desplazamientos desconocidos y las reacciones en los apoyos.
13. Se calculan las fuerzas internas que debe soportar cada barra utilizando la siguiente ecuación:

$$S_{ij} = \frac{AE}{L} [\lambda \quad \mu \quad \nu]_{ij} \begin{bmatrix} v_j & v_i \\ w_j & w_i \end{bmatrix}$$

5.2. MODELACIÓN EN SAP:

El programa SAP 2000 es uno de los software de modelación líder en ingeniería civil, por medio de este es posible analizar cualquier clase de estructura, y de diseñar cada elemento de manera óptima y precisa con la asistencia de los reglamentos más conocidos como ACI, RCDF, entre otras. El programa permite modelar complejas geometrías, definir las cargas, generar los precios propios de manera automática, asignar secciones, materiales y demás. El modelo se definió con las geometrías establecidas en el programa, en la figura 3 se muestra el modelo realizado en el programa.

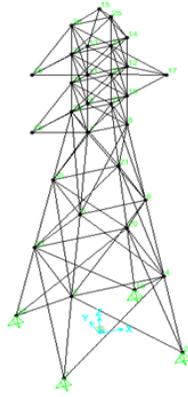


Figura 3: Modelo de Torre en el programa SAP 2000

A continuación se observa el comportamiento mecánico a las cargas impuestas a la estructura.

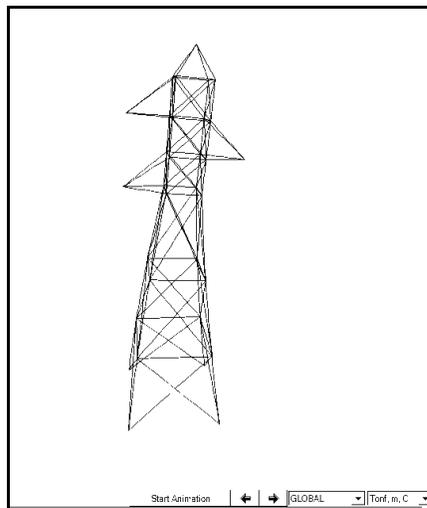


Figura 4: Deformada del modelo en SAP 2000

6. RESULTADOS EXCEL Y VERIFICACIÓN CON SAP 2000

Las tablas 3 y 4 muestran la solución de Excel y SAP 2000 para los desplazamientos en los nodos 15, 16, 17,18 ubicados en los brazos externos de la torre de energía. Las tablas 3 y 4 muestran los resultados arrojados por Excel y SAP 2000 para las fuerzas reactivas ubicadas en los apoyos. Los cálculos arrojados en Excel ilustran una mayor compresión en el elemento 3-30 con una fuerza interna de 7,21 Toneladas fuerza.

Tabla 3: Desplazamientos en brazos externos de la torre por Excel

δ	
2.0755E-07	u15
2.173E-08	v15
-2.7112E-08	w15
1.9064E-07	u16
5.3602E-09	v16
-2.6675E-08	w16
1.5941E-07	u17
2.8037E-08	v17
-8.089E-08	w17
1.4361E-07	u18
-6.5806E-10	v18
-7.9421E-09	w18

Tabla 4: Desplazamientos en brazos externos de la torre por SAP 2000

NODOS	U1 (m)	U2 (m)	U3 (m)
15	0.002086	0.000221	-2.69E-04
16	0.001908	0.000067	-0.000251
17	0.001598	0.000267	-0.000805
18	0.001435	8.766E -06	-0.000070

Tabla 5: Reacciones en Apoyos por Excel

X1	-0.5721
Y1	-1.0825
Z1	-3.7604
X2	-2.4914
Y2	3.1439
Z2	10.5338
X19	-2.6587
Y19	-3.3822
Z19	11.2940
X32	-0.0733
Y32	0.9420
Z32	-2.3734

Tabla 5: Reacciones en Apoyos por SAP 2000

NODOS	F1 (Ton f)	F2 (Ton f)	F3 (Ton f)
1	-0.5672	-1.0731	-3.7066
2	-2.4752	3.1211	10.4749
19	-2.6671	-3.3841	11.3611
32	-0.0905	0.9561	-2.4394

7. CONCLUSIONES

- Se ha podido concluir que a partir de lo evidenciado a lo largo del artículo, que el método de rigidez matricial es una excelente herramienta para la realización de los cálculos ya que permite la corrección de errores de manera rápida y exacta durante todo el trabajo.
- La modelación en SAP 2000 contiene las mayores ventajas debido a que al finalizar la modelación y luego de asignar cargas, nos permite constatar que los cálculos obtenidos en Excel son coherentes.
- Se ha observado que la modelación en SAP 2000, y por medio del método de rigidez matricial son un gran avance de la ingeniería, y que estos evidentemente ayudan al ingeniero a constatar los datos obtenidos y poder tener una mejor perspectiva de proyecto a realizar.
- SAP 2000 permite observar de manera directa las cargas axiales que actúan sobre la estructura algo que no es sencillo de determinar por el ingeniero.

8. AUTHORIZATION AND DISCLAIMER

Authors authorize LACCEI to publish the papers in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.

REFERENCES

- Felippa. C. (2000). *A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado, USA.
- Domínguez, A. (2000). *Análisis estructural*. Instituto Politécnico Nacional.
- BOSCH J. (2006). *Métodos finitos*.

Authorization and Disclaimer

Authors authorize LACCEI to publish the paper in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.